1 Föreläsning VI; S:a av flera stok. var.

Vi börjar med att definiera att två stokastiska variabler ξ_1 och ξ_2 är oberoende. Senare ger vi formler för väntevärde och varians för summor.

Definition 1 ξ_1 och ξ_2 Är oberoende om

$$P(\xi_1 \leq x_1 \wedge \xi_2 \leq x_2) = P(\xi_1 \leq x_1) \cdot P(\xi_2 \leq x_2). \tag{1}$$

Kommentarer

- Definitionen av oberoende kan göras för fler stokastiska variabler.
- $\leq$ kan bytas mot $<$ eller $>$ eftersom vi har visat att

$$A \text{ och } B \text{ ober.} \Longleftrightarrow A \text{ och } B^c \text{ oberoende.}$$

Ex 1 Låt ξ vara antal datorer som säljs under en vecka i affären Datornörd. Vi antar vidare att frekvensfunktionen är

x	0	1	2
$P(\xi = x)$	0.3	0.4	0.3

Vi låter vidare ξ_1 och ξ_2 vara antal sålda datorer under vecka 1 respektive 2. Det är rimligt att anta att dessa är oberoende och har samma fördelning d.v.s. som i tabellen ovan.
Frågan är nu vilken fördelning har för antal sålda datorer under en tvåveckorsperiod.

Lösning:

Det betyder att vi söker fördelningen hos summan $\eta_{=}\xi_1 + \xi_2$. Det är självklart att η kan anta värdena $0, 1, 2, 3, 4$. Hur fördelar sig sannolikheterna för η?

$$P(\eta = 0) = P(\xi_1 = 0 \wedge x_2 = 0) = \{\text{ober.}\} = 0.3^2 = 0.09.$$

$$P(\eta = 1) = P((\xi_1 = 0 \wedge \xi_2 = 1) \vee (\xi_1 = 1 \wedge \xi_2 = 0)) =$$

$$\{\text{disj. och ober.}\} = 0.3 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.3 = 0.24$$

P.s.s. blir

$$P(\eta = 2) = 0.34, \quad P(\eta = 3) = 0.24 \text{ och } P(\eta = 4) = 0.09.$$

■

Kommentarer

- I någon mening är ξ symmetrisk fördelad men även om så inte är fallet får $\xi_1 + \xi_2$ en frekvensfunktion som påminner om En normalfördelning.

Ex 2 Vad är väntevärdet för ξ och $\eta = \xi_1 + \xi_2$ i föregående exempel?

Lösning:

$$E(\xi) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.4 + \cdot 0.3 = 1$$

Då bör η ha väntevärdet 2. Vi räknar dock ut det direkt.

$$E(\eta) = 0 \cdot 0.09 + 1 \cdot 0.24 + 2 \cdot 0.34 + 3 \cdot 0.24 + 4 \cdot 0.09 = 2.$$

■

Sats 1 Låt a och b vara konstanter och ξ_1 och ξ_2 oberoende. Då är

$$\begin{array}{lrcl} i) & E(a\,\xi + b) & = & a\,E(\xi) + b \\ ii) & V(a\,\xi + b) & = & a^2 V(\xi) \\ iii) & E(\xi_1 + \xi_2) & = & E(\xi_1) + E(\xi_2) \\ iv) & V(\xi_1 + \xi_2) & = & V(\xi_1) + V(\xi_2) \end{array} \qquad (2)$$

Kommentarer

- iii) gäller även om ξ_1 och ξ_2 är beroende.
- Variansen för $2\xi_1$ är större än variansen för $\xi_1 + \xi_2$, om de är oberoende:

$$V(2\xi_1) = 2^2 V(\xi_1) = 4V(\xi_1) \text{ men } V(\xi_1 + \xi_2) = 2V(\xi_1).$$