1 Reducerat faktorförsök rff

Vi skall med tre faktorer och således 2^3 försök reducera till ett fullständigt 2^2- försök.

1.1 Tre faktorer

Vi repeterar med ett tidigare fullständigt faktorförsök med tre faktorer.

Designmatris

nr	A	B	C	y (km/h)	AB	BC	CA	ABC
1	$-$	$-$	$-$	$y_+ = 43.5$	$+$	$+$	$+$	$-$
2	$+$	$-$	$-$	$y_2 = 47.3$	$-$	$+$	$-$	$+$
3	$-$	$+$	$-$	$y_3 = 44.5$	$-$	$-$	$+$	$+$
4	$+$	$+$	$-$	$y_4 = 48.5$	$+$	$-$	$-$	$-$
5	$-$	$-$	$+$	$y_5 = 45.4$	$+$	$-$	$-$	$+$
6	$+$	$-$	$+$	$y_6 = 46.5$	$-$	$-$	$+$	$-$
7	$-$	$+$	$+$	$y_7 = 44.7$	$-$	$+$	$-$	$-$
8	$+$	$+$	$+$	$y_8 = 47.2$	$+$	$+$	$+$	$+$

Värdena på $y_+, ..., y_8$ är inte intressanta i följande resonemang.

1.1.1 Huvudeffekterna

Vi beräknar huvudeffekterna l_A och p.s.s för B och C.

$$l_A = \frac{1}{4}(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) - \frac{1}{4}(y_1 + y_3 + y_5 + y_7)$$

$$l_B = \frac{1}{4}(y_3 + y_4 + y_7 + y_8) - \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_5 + y_6)$$

$$l_C = \frac{1}{4}(y_5 + y_6 + y_7 + y_8) - \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$$

Man vill reducera till ett fullständigt ff genom att stryka de rader som motsvarar " $-$ " i faktorn ABC för att sedan stryks detta samspel, d.v.s. raderna y_1, y_4, y_6 och y_7. På så sätt finns teckenvariationer $\pm$ kvar för de tre effekterna. Vi får följande reducerade designmatris

Designmatris

nr	A	B	C	y	AB	BC	CA	ABC
2	$+$	$-$	$-$	y_2	$-$	$+$	$-$	$+$
3	$-$	$+$	$-$	y_3	$-$	$-$	$+$	$+$
5	$-$	$-$	$+$	y_5	$+$	$-$	$-$	$+$
8	$+$	$+$	$+$	y_8	$+$	$+$	$+$	$+$

(1)

Vi ser att kolonnen för ABC endast innehåller plus. Vi kan alltså inte beräkna samspelet för ABC. Samspel för högre ordningar brukar man dessutom bortse ifrån. Vi skall uppfatta tecknen som multiplikation mellan kolonnnerna (här skrivna som rader). $A = (+, -, -, +)$ och $B = (-, +, -, +)$, så att elementvis multiplikation[1] ger

$$A \cdot B = A\,B = (-, -, +, +) \text{ och}$$
$$A \cdot B \cdot C = ABC = ... = (+, +, +, +) =: I \tag{2}$$

där multiplikationen med I, ex.vis $I\,A = A$. Ur (2) kan vi beräkna C:

$$ABC = I \Longrightarrow ABABC = C = ABI = AB.$$

Definition 1

1. En kolumn av längd n är en vektor med n komponenter $A = (x_1, x_2, ..., x_n)$ där $x_j = 1 = +1$ eller $x_j = -1$.
   1 skrivs med bara + och -1 skrivs med bara -1.
2. För två kolumner med n komponenter
   $$A = (x_1, x_2, ..., x_n) \text{ och } B = (y_1, y_2, ..., y_n) \text{ är produkten}$$
   $$A \cdot B = A\,B = (x_1 y_1, x_2 y_2, ..., x_n y_n).$$
3. För produkten A_1, $A_2, ..., A_k$ är dess *längd* k, d.v.s. antal vektorer.
4. Vektorn $I = (+, +, ..., +)$ med n komponenter är neutralt element.
5. Ett *ord* är en produkt av k vektorer, som är lika med I:
   $$A_1,\ A_2, ..., A_k \text{ med } A_1\,A_2...A_k = I.$$
6. Givet mängden W av vektorer motsvarande ett ff. Den produkt av vektorer ur W som är lika med I och har minst kolumner kallas *upplösningen* av ff och betecknas med romersk siffra.
7. om $A_1 A_2..A_k = B_1 B_2..B_l$ så kallas de två produkterna *alias*.
8. Speciellt, om $A = B_1 B_2..B_l$, så är $B_1 B_2...B_l$ alias med en huvudfaktor.
9. Vi det reducerat ff kam man införa nya faktorer uttryckta som produkter av de gamla. Om A_{j_1}, A_{j_2}, ..., A_{j_m} är faktorn i ett reducerat ff och B en ny faktor definierad som
   $$B = A_{j_1} \cdot A_{j_2} \cdot ... \cdot A_{j_m}$$
   så kallas sambandet en *generator*.

---

[1] Detta är varken skalär produkt eller matrismultiplikation.

1.1.2 Speciella egenskaper hos " $\cdot$ "

$$I \cdot A = A \cdot I = A, \quad A \cdot A = I,\, A \cdot B = B \cdot A, \quad A\,A = I\,. \tag{3}$$

Ex 1 I den sista designmatrisen (6) är $ABC = I$. Vi multiplicerar med B och får

$$AABC = AI \text{ d.v.s. } BC = A.$$

A och BC är alltså alias.

Vi förstår att

$$A_1\,A_2...A_k = I \Longleftrightarrow A_1 = A_2...A_k \tag{4}$$

A_1 och $A_2...A_k$ är alias.

1.2 Likheter med alias

Man beräknar l_A för den reducerade designmatrisen ovan och betecknar den $\widetilde{l}_A$.Vi ser att $I = ABC$, så att $A = IA = AABC = BC$. Man säger att A och BC är *alias*. Man kan visa att (övning!)

$$\widetilde{l}_A = l_A + l_{BC}. \tag{5}$$

Kommentarer

- I likheter som (5) vill man att effekten motsvarande ett samspel (BC i exemplet) är så liten, vilket det i regel är om samspelet är av hög ordning, typ $BCDE$.
- Om alltså upplösningen är IV är alias till A minst 3-samspel.

1.3 Fyra faktorer

	A	B	C	D	AB	AC	AD	BC	BD	CD	ABC	ABD	ACD	BCD	$ABCD$
y_1	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
y_2	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
y_3	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
y_4	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
y_5	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
y_6	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$
y_7	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
y_8	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$
y_9	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$
y_{10}	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
y_{11}	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
y_{12}	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$
y_{13}	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
y_{14}	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$
y_{15}	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$
y_{16}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

	A	B	C	D	AB	AC	AD	BC	BD	CD	ABC	ABD	ACD	BCD	ABCD
y_+	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	+
y_4	+	+	−	−	+	−	−	−	−	+	−	−	+	+	+
y_6	+	−	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+	−	+	+
y_7	−	+	+	−	−	−	+	+	−	−	−	+	+	−	+
y_{+0}	+	−	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	−	+	+
y_{++}	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+
y_{+3}	−	−	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	−	−	+
y_{+6}	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Vi ser att i denna reducerade designmatris erhålls genom attt stryka de rader som motsvarar minustecken, d.v.s. $-$ i $ABCD$ och bortser från detta samspel. Dessutom gäller att $ABCD = I$, så att ex.vis är

$$AI = AABCD = IBCD = BCD,\ B = ACD,\ C = ABD$$

Vi ser direkt detta genom att titta på den reducerade designmatrisen. D.v.s. A och BCD är alias. Det betyder att

$$\tilde{l}_A = l_A + l_{BCD}$$

Där $\tilde{l}_A$ är l_A för denna reducerade matris och l_A samt l_{BCD} kommer från den första matrisen.
Ytterligare en reducering görs

	A	B	C	D	AB	AC	AD	BC	BD	CD	ABC	ABD	ACD	BCD	ABCD
y_{10}	+	−	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	−	+	+
y_{11}	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+
y_{13}	−	−	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	−	−	+
y_{16}	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Vi ser då att A får tre alias AD, BC och BCD och $D = I$, vilket gör att vi inte kan beräkna l_D . Det följer att

$$\tilde{l}_A = l_A + l_{AD} + l_{BC} + l_{BCD}.$$

Att A på en lägre nivå blandas ihop med A, AD, BC och BCD kallas *sammanblandningsmönster*.

1.4 Ord och ordens längd m.m.

Man reducerar faktorförsök för att få ned antal mätningar (antal y_j) men ha så hög upplösning som möjligt. Detta diskuteras nedan.

- Om vi har **Upplösning II** innebär, det att, ex.vis $AB = I$. Detta ger att

  $$A\,AB = A\,AB = B = A$$

  d.v.s. huvudeffekter kan blandas ihop med varandra, vilket ger att $\tilde{l}_A = l_A + l_B$, vilket inte är bra.

- **Upplösning III** innebär att, ex.vis så är $ABC = I$, så att $AB = C$. Huvudeffekter kommer att blandas ihop med 2-faktorsamspel. Om det är dåligt eller inte, beror på situationen.

- Betrakta sambandet

$$\widetilde{l}_A = l_A + l_{BD} + l_{BCE} + l_{CDE}.$$

- På vilket sätt är ekvationen intressant? Det är intressant eftersom man hur l_A och $\widetilde{l}_A$ hänger ihop. Helst vill man att $\widetilde{l}_A$ och l_A skall vara ungefär samma. Ofta kan man ignorera 3-faktorsamspel och högre ordningen. Så om man vet (i en reell situation) att l_{BD} är litet så blir ju då $\widetilde{l}_A$ och l_A ungefär samma. Vilket ger att det reducerade faktorförsöket verkar lämpligt för att få fram l_A approximativt genom att ta fram $\widetilde{l}_A$ (som är enklare).

- Om man å andra sidan (i en reell situation) vet att l_{BD} är stort så är detta reducerade faktorförsök inte bra upplagt för att få fram l_A ungefärligen. Då får man försöka med andra generatorer.

1.5 rff med annan metod

Vi såg ovan att vi inte kan komma längre genom att stryka rader i den reducerade ff/planen. För att reducera ett faktorförsök ff, två nivåer till en 2^3−ff (2^3−plan) kan man utgår från ett fullständigt 2^3−ff och bygga på den.

nr	A	B	C	y	AB	BC	CA	ABC
1	−	−	−	y_1	+	+	+	−
2	+	−	−	y_2	−	+	−	+
3	−	+	−	y_3	−	−	+	+
4	+	+	−	y_4	+	−	−	−
5	−	−	+	y_5	+	−	−	+
6	+	−	+	y_6	−	−	+	−
7	−	+	+	y_7	−	+	−	−
8	+	+	+	y_8	+	+	+	+

(6)

1.5.1 Sammanfattning av reducerat ff (rff)

Det reducerade ff har både för- och nackdelar.

- Vi utgår från att ju högre samspel desto mindre motsvarande effekter.

- Man vill alltså ha så hög upplösning som möjligt så att man får $\widetilde{l}_A \approx l_A$.