1 Exempel (I)

1. En löpartävling har 10 deltagare. På hur många sätt kan listan fˆr de 3 främsta se ut?

   Lösning

   Vi kan välja de tre främsta på

   $$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

   sätt. Detta kallas antal *permutationer* av 3 valda ur 10.

■ Antal permutationer av k element valda bland n element är

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{1}$$

Observera att detta är antal sätt att välja k element av n element
utan återläggning och
med hänsyn till inbördes ordning.

2. En korg med 3 par röda och två par blå strumpor, som i övrigt är identiska ligger helt blandade. I mörkret tar Johan, slumpvist 5 strumpor.

   (a) Vad är sannolikheten att han får precis två röda strumpor?

   (b) Vad är sannolikheten att få minst två röda strumpor?

   Lösning

   (a) Sannolikheten att han får precis två röda strumpor: Låt sannolikheten vara $p = \dfrac{g}{m}$. Då är $m = \dbinom{10}{5}$. För att räkna ut g använder vi Multiplikationsprincipen. Det finns 6 röda strumpor och 4 blå.

   $$g = \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{3}$$

   Sökt sannolikhet är

   $$p = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{10}{5}} = \frac{15 \cdot 4}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}} = \frac{15 \cdot 4}{9 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{5}{21}.$$

   (b)

   $$p = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} + \binom{6}{3} \cdot \binom{4}{2} + \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} + \binom{6}{1} \cdot \binom{4}{0}}{\binom{10}{5}} = \ldots = \frac{41}{42}$$

   Alternativt räknar vi på komplementhändelsen:

   $$p = 1 - \frac{g'}{m} = 1 - \frac{\binom{6}{0} \cdot \binom{4}{5} + \binom{6}{1} \cdot \binom{4}{0}}{\binom{10}{5}} = 1 - \frac{6}{252} = 1 - \frac{1}{42} = \frac{41}{42}.$$

   Vi har i första termen i täljaren en faktor $\dbinom{4}{5}$ som vi får tolka som $= 0$. I den andra termen har vi $\dbinom{4}{0} \equiv \dbinom{4}{4}$.

3. En sportfiskare får napp med sannolikheten 0.2 för varje kast. Kastens utfall är oberoende. Beräkna sannolikheten för att det behövs 4 försök innan sf ffg lyckas.

Lösning

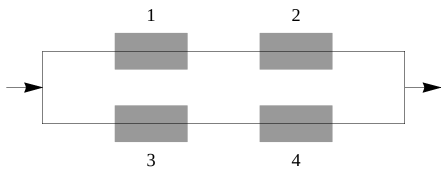
Låt A_k vara händelsen att sf får napp vid kast nummer k. Händelsen

$$A = A_1^c \cap A_2 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4$$

beskriver vad som händer. Sannolikheten är

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1^c \cap A_2 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4) = \{\text{ober.}\} = \\ &= P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) \cdot P(A_3^c) \cdot P(A_4) = \\ &= (1-0.2)^3 \cdot 0.2 = 0.1024 \approx 0.1 \end{aligned}$$

4. En elkrets består av fyra motstånd med samma resistans. Motstånden går sönder oberoende av varandra.



Dessa går sönder med sannolikheten p. Elkretsen är hel om minst en av parallellkopplingarna är hel.

(a) Vad är sannolikheten att kretsen är hel? Ge ett uttryck i p och beräkna den om $p = 0.02$.

(b) Visa att sannolikheten för att elkretsen är sönder kan skrivas

$$(2p - p^2)^2.$$

Lösning

(a) Sannolikheten P att kretsen är hel ges av att 1 och 2 är hela eller att 3 och 4 är hela. Sätt händelsen att resistor j är hel till R_j. Då är $P(R_j) = 1 - p = 0.98$. P.g.a. oberoende är detta

$$P := P((R_1 \cap R_2)) \cup (R_3 \cap R_4)) =$$

$$P(R_1 \cap R_2) + P(R_3 \cap R_4) - P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4) =$$

$$P(R_1) \cdot P(R_2) + P(R_3) \cdot P(R_4) - P(R_1) \cdot P(R_2) \cdot P(R_3) \cdot P(R_4) =$$

$$2(1-p)^2 - (1-p)^4 = 0.998432.$$

5. Vad är sannolikheten för $A \cap B^c$ om

$$P(A) = 0.5,\ P(A \cup B) = 0.7,\ P(B) = 0.4\,?$$

Lösning

Vi använder oss av likheten

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$.

Med de givna värdena får vi

$$P(A \cap B) = 0,5 + 0.4 - 0.7 = 0.2.$$

Vidare är

$P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = P(A)$ som ger att $P(A \cap B^c) = 0.5 - 0.2 = 0.3$.

6. (a) Visa att $P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = P(A)$.

   Bevis

   $$(A \cap B^c) \cup (A \cap B) = A \text{ och } (A \cap B^c) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

   Vi får

   $P((A \cap B^c) \cup (A \cap B)) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) - P((A \cap B^c) \cap (A \cap B))$.

   Nu är vänster sannolikhet $P(A)$ och sista termen i HL är $P(\emptyset) = 0$. Det visar likheten.

   (b) Visa att om A och B är oberoende händelser, så är A och B^c oberoende.

   Bevis

   Vi skall visa att $P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(A^c)$. Nu är

   $$\begin{aligned} P(A) \cdot P(B^c) &= P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = \\ &= P(A) - P(A \cap B) = \{\text{enl. (a)}\} = P(A \cap B^c). \end{aligned}$$

7. Vad är sannolikheten att minst två personer i en klass med

   (a) 40 personer fyller år samma dag?

   (b) 23 personer fyller år samma dag?

Lösning

Vi antar att ett år har 365 dagar och att vi har en likformig fördelning, d.v.s. sannolikheten att vara född en viss dag är samma för alla dagar.

(a) 40 personer fyller år samma dag: Låt m vara antalet möjliga utfall och g antal gynnsamma. Det visar sig vara enklare att beräkna sannolikheten att *ingen* Är född samma dag. Då blir

$$g = \underbrace{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - 39)}_{40 \text{ faktorer}} \text{ och } m = 365^{40}.$$

Det ger

$$P_{40} := \frac{g}{m} = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - 39)}{365^{40}} = 0.108768...$$

Sökt sannolikhet är $1 - P_{40} = 0.89...$

(b) 23 personer fyller år samma dag: Detta löses med samma koncept som i (a).

$$P_{23} := \frac{g}{m} = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot ... \cdot (365-22)}{365^{23}} = 0.492703...$$

Som ger den sökta sannolikheten $1 - P_{23} \approx 0.51$.

8. $(*)$ Man drar k kulor ur en mängd med n kulor. Varje kula är unik, försedd med ett nummer, från 1 till n. En sådan dragning kan ges på olika sätt. Dels med eller utan återläggning till inbördes ordning och dels med eller utan återläggning.

   - Med hänsyn ill inbördes ordning och med återläggning ger n^k sätt.
   - Med hänsyn ill inbördes ordning och utan återläggning ger $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ sätt.
   - Utan hänsyn ill inbördes ordning och med återläggning ger n^k sätt.
   - Utan hänsyn ill inbördes ordning och utan återläggning ger $\binom{n}{k}$ sätt.

	Med hänsyn till Inbördes ordning	Utan hänsyn till Inbördes ordning
Med återläggning		
Utan återläggning		