1 Exempel med geo, hyp och binfördelningar

Ex 1 På en brädgård kapas 400 brädor med måttet 2×4 tums hyvlat virke i längden 24 dm. Av 400 räknar man med att 5 är defekta (sprickor, kåda m.m.). En kund ämnar köpa detta parti om 400 brädor, om partiet godkänns. Av dessa undersöks 10 slumpvist utvalda (omgång 1). Om dessa är korrekta (ej defekta) godkänns partiet. Om 1 är defekt, tas ytterligare 10 som undersöks (omgång 2). Om dessa är korrekta godkänns partiet på 400 brädor, annars underkänns partiet. Vad är sannolikheten att ett sådant parti godkänns?

Lösning:

Vi sätter G som händelsen att partiet godkänns, G_1 händelsen att partiet godkänns vid första omgången och G_2 händelsen att partiet godkänns i andra omgången. Då är

$$G = G_1 \cup G_2 \text{ och dessa händelser är disjunkta.}$$

Allså är

$$P(G) = P(G_1) + P(G_2) = P(G_1) + P(G_2|H)P(H)$$

där H är händelsen av exakt en defekt i första omgången. Vi kan införa lämpliga stokastiska variabler för att uttrycka händelserna. Låt ξ_1 vara antal korrekta i första omgången och ξ_2 antal korrekta i andra omgången. Då är

$$\xi_1 \in \text{Hyp}(400, 10, p_1) \text{ där } p_1 = \frac{395}{400}.$$

Även ξ_2 är hypergeometriskt fördelad men beroande av ξ_1. Sannolikheten

$$\begin{aligned} P(G) &= P(\xi_1 = 10) + P(\xi_2 = 10 \cap \xi_1 = 9) = \\ &= P(\xi_1 = 10) + P(\xi_2 = 10 | \xi_1 = 9) \cdot P(\xi_1 = 9). \end{aligned}$$

Nu är

$$\begin{aligned} P(\xi_1 = 10) &= \frac{\binom{395}{10} \cdot \binom{5}{0}}{\binom{400}{10}}. \\ P(G_2) &= \frac{\binom{386}{10} \cdot \binom{4}{0}}{\binom{390}{10}} \cdot \frac{\binom{395}{9} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{400}{10}} \text{ som ger} \\ P(G) &= P(G_1) + P(G_2) = 0.880527\ldots + 0.10276\ldots = 0.98\ldots \end{aligned}$$

Ex 2 Anja fiskar med kastspö och räknar att få napp med sannolikheten 0.2 vid varje kast. Händelserna att få napp vid olika kast är oberoende.

(a) Vilken typ av fördelning rör det sig om för händelsen att få napp f.f.g. vid kast nr x?

(b) Vad är sannolikheten att få napp f.f.g. vid andra kast?

(c) Vad är sannolikheten att få napp f.f.g. efter andra kast?

(d) Vad är sannolikheten att få napp f.f.g. vid kast nr x?

(e) Vad är sannolikheten att få napp f.a.g. vid kast nr x?

Lösning:

(a) Typ av fördelning: Låt η vara antal kast tills napp f.f.g., en geometrisk fördelning med parameter $p = 0.2$. Man skriver $\eta \in \mathrm{Geo}(0.2)$.

(b) sannolikheten att få napp f.f.g. vid andra kast är

$$P(\eta = 2) = (1-p) \cdot p = 0.16\,.$$

(c) Sannolikheten att få napp f.f.g. efter andra kast är

$$P(\eta > 2) = \sum_{x=3}^{\infty} (1-p)^{x-1} \cdot p.$$

Denna serie/summa är geometrisk och går att beräkna. Enklare är att betrakta komplementhändelsen, $\{\eta \leq 2\}$.

$$P(\eta > 2) = 1 - P(\eta \leq 2) = 1 - (1 + (1-p))p = 0.64\,.$$

(d) Sannolikheten att få napp f.f.g. efter kast nr x är $(1-p)^{x-1}\,p$

(e) Sannolikheten att få napp f.a.g. efter kast nr x fås genom uttryck som

$$\underbrace{(1-p)(1-p)(1-p)p(1-p) \cdot \ldots \cdot (1-p)}_{x-1 \text{ kast}} \cdot p = (1-p)^{x-2} \cdot p^2$$

d.v.s. bland de $x - 1$ första kasten finns precis ett p och kast nr x ger ytterligare ett p. På hur många sätt kan 1 väljas av $x - 1$? Jo, $\binom{x-1}{1}$ sätt.

Sökt sannolikhet är

$$(x-1)(1-p)^{x-2} \cdot p^2\,.$$
