1 Föreläsning I, Mängdlära och elementär sannolikhetsteori, LMA201, LMA521

1.1 Mängd (Kapitel 1)

En (oordnad) mängd A är en uppsättning av element. En sådan mängd kan innehålla ändligt eller oändlligt med element. Ex.vis

$$A := \{x_1, x_2, ..., x_n\}. \tag{1}$$

A har n element, om alla x_k är olika, alltså ett ändligt antal.
Ex.vis är

$$F = \{1, 2, 4, \sqrt{3}, 4, 2\} = \{1, 2, 4, \sqrt{3}\}\,.$$

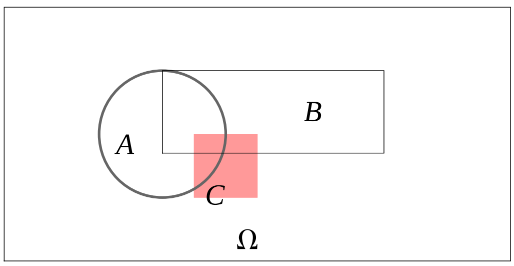
Antal element i mängden skrivs $|F|$, d.v.s. $|F| = 4$.

- Med $A \cup B$ menas mängden av de element som ligger i A eller B.
- Med $A \cap B$ menas mängden av de element som ligger i A och B.
- Med $A \setminus B$ menas mängden av de element som ligger i A men inte i B.
- Att ett element x finns i en mängd A skrivs $x \in A$.
- Med $A \subset B$ menas att om $x \in A$, så gäller $x \in B$. A är *delmängd* av B, alternativt B är *övermängd* till A.
- $\emptyset$ är den *tomma* mängden, mängden som inte innehåller något element.
- Givet en grundmängd Ω. Med $A \subset \Omega$. Då är $A^c = \Omega \setminus A$, komplementet till $\boldsymbol{A}$.

Kommentarer

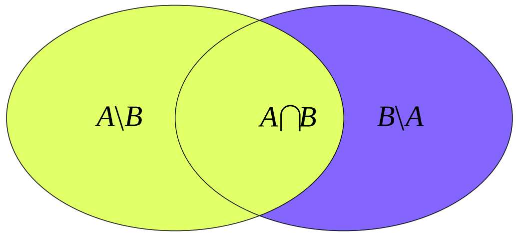
- Att $A \subset B$ betyder att om $x \in A$ så är $x \in B$.
  Alternativt kan det skrivas som att $x \notin B \Longrightarrow x \notin A$.
- En likhet $A = B$ är alltså ekvivalent med att $A \subset B$ och $B \subset A$.

Ex 1 För att bevisa följande likheter räcker det att rita mängder. Börja med att rita en grundmängd Ω!



Venn-diagram med tre delmängder i en grundmängd Ω.

- $(A^c \cup B^c) = (A \cap B)^c$.
- $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (symmetrisk differens).
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.



Ex 2 *Ett* kast med en tärning
Dess *utfall* är $1, 2, 3, 4, 5, 6$ och vi kan tala om mängden $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Denna mängd innehåller *alla* utfall och kallas *utfallsrummet*. Den betecknas Ω även i boken.
För en sannolikhet (av en händelse), ofta betecknad P eller p, gäller $0 \leq p \leq 1$.

Ex 3 Vad är sannolikheten att i *ett* tärningskast, få

(a) en 2:a eller en 6:a,

(b) ett udda tal,

(c) ett tal ≤ 5?

Lösning:

Det är naturligt att samtliga 6 utfall sker med samma sannolikhet och att *totala* sannolikheten är 1. Vi sätter Ω, som ovan.

(a) Som mängd betraktad $A = \{2, 6\}$. Den inträffar med sannolikheten $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

(b) Ett udda tal är $1, 3$ eller 5. Som mängd betraktad är det $B := \{1, 3, 5\}$. B innehåller 3 element. Det är då rimligt att sannolikheten för att får ett udda tal är
$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}\,.$$

(c) Ett tal ≤ 5 är $1, 2, 3, 4$ eller 5, alltså 5 utfall. Som mängd sätter vi
$$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$
Sannolikheten som söks, d.v.s. att få ett tal ≤ 5 är $\frac{5}{6}$.

Kommentarer

- Sannolikheten för de 6 utfallen är densamma $\frac{1}{6}$. Man talar om *likformig sannolikhetsfördelning*.

(a) Vi införde beteckningen $|A|$, som antal element i mängden A. Här är $|\Omega| = 6$. Vi kan i (a) sätta $|A| = |\{2, 6\}| = 2$. Den sökta sannolikheten i (a) är

$$\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} =: P(A) = \frac{1}{3}.$$

Vi inför beteckningen M, för *antal möjliga utfall*. Då är

$$M = |\Omega| = 6.$$

P.s.s. inför vi G för *antal gynnsamma utfall*. Då är

$$G = |A| = 2.$$

Den sökta sannolikheten i (a) kan alltså skrivas

$$\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{G}{M} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

(b) Här är

$$G = |B| = 3 \text{ och därmed är } P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{G}{M} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

(c)

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{G}{M} = \frac{5}{6}.$$

- Begreppet *mängd* ersätts så småningom av begreppet *händelse*.
- *Sannolikhet* hänger ihop med *relativ frekvens*; Om man kastar en tärning, säg 100 gånger, bör c:a 1/6 vara 2:or, d.v.s. ungefär 16 till 17 gånger bör man få en 2:a.

Ex 4 Med samma mängder (händelser) som i föreående exempel, bestäm

(a) $A \cup B$ och $A \cap B$.

(b) $A \cup C$ och $A \cap C$.

(c) A^c och $B \cap C$.

(d) och motsvarande sannolikheter.

Lösning:

(a)

$$A \cup B = \{2, 6\} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 5, 6\}.$$
$$A \cap B = \{2, 6\} \cup \{1, 3, 5\} = \emptyset.$$

(b)

$$A \cup C = \{2, 6\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad A \cap C = \{2\}.$$

(c) $A^c = \Omega \setminus A$ är ju *komplementet* till A och är $A^c = \{1, 3, 4, 5\}$ alltså mängden av de utfall som ligger i Ω men *inte* i A.

$$B \cap C = \{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5\} = B\,.$$

Speciellt är ju $B \subset C$. Detta är ekvivalent med att $B \cap C = B$.

(d) Motsvarande sannolikheter är

(a) $P(A \cup B) = \dfrac{5}{6}$ och $P(A \cap B) = P(\emptyset) = \dfrac{0}{6} = 0$.

(b) $P(A \cup C) = \dfrac{6}{6} = 1$ och $P(A \cap C) = \dfrac{1}{6}$.

(c) Respektive $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.
$P(B \cap C) = P(B) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Kommentarer

- I (a) är $P(A \cup B) = \dfrac{5}{6}$. Är det detsamma som att addera, d.v.s. är denna sannolikhet

$$P(A) + P(B)\,?$$

Vi ser att $P(A) + P(B) = \dfrac{2+3}{6} = P(A \cup B)$. Likheten beror på att $P(A \cap B) = 0$. Mer exakt så är A och B disjunkta ("ej samtidiga") och $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$. Därför är

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B).$$

- Om vi sätter $A \cup B = D = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, så kan vi skriva D, som en disjunkt union:

$$D = A \cup B = A \sqcup B.$$

Varje mängd D kan delas upp i en eller flera parvis disjunkta delmängder. En sådan disjunkt union skrivs som ovan med " $\sqcup$ ". Man kan tänka sig att en mängd D är lika med

$$D = \sqcup_{k=1}^{n} A_k$$

en parvis disjunkt union. Fördelen med det är att

$$P(D) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

- Vi jämför nu $P(A \cup C)$ med $P(A) + P(C)$.

$$P(A \cup C) = \frac{6}{6} = 1 \text{ och } P(A) + P(C) = \frac{5+2}{6} = \frac{7}{6}(> 1).$$

Vi skall justera så att vi får en likhet. $A \cap C = \{2\}$ och $P(A \cap C) = \dfrac{1}{6}$.

För att få likhet, får vi subtrahera $1/6$ i VL på följande sätt

$$P(A) + P(C) - P(A \cap C) = P(A \cup C). \tag{2}$$

Vi ser att det numeriskt stämmer. Likheten beror på att i VL finns elementet 2 (som mängd $\{2\}$) finns i både A och C.
Likheten (2) gäller generellt i sannolikhetslära.

Ex 5 Två kast med en tärning
Vad är sannolikheten att

(a) första kast är jämnt.

(b) summan är 7,

(c) summan är udda och summan jämn.

Lösning:

(a) Att första kast är jämnt är oberoende av utfallet av andra kast. Således är den sannolikheten $\frac{1}{2}$.

(b) Summan är 7. Låt vågrät rad utgöra andra kast och lodrät kolonn utgöra 1:a kast.

$$\begin{pmatrix} (1\ \ 1) & (1\ \ 2) & (1\ \ 3) & (1\ \ 4) & (1\ \ 5) & (1\ \ 6) \\ (2\ \ 1) & (2\ \ 2) & (2\ \ 3) & (2\ \ 4) & (2\ \ 5) & (2\ \ 6) \\ (3\ \ 1) & (3\ \ 2) & (3\ \ 3) & (3\ \ 4) & (3\ \ 5) & (3\ \ 6) \\ (4\ \ 1) & (4\ \ 2) & (4\ \ 3) & (4\ \ 4) & (4\ \ 5) & (4\ \ 6) \\ (5\ \ 1) & (5\ \ 2) & (5\ \ 3) & (5\ \ 4) & (5\ \ 5) & (5\ \ 6) \\ (6\ \ 1) & (6\ \ 2) & (6\ \ 3) & (6\ \ 4) & (6\ \ 5) & (6\ \ 6) \end{pmatrix}$$

Vi får $M = 6^2 = 36$ och $G = 6$, så att sökt sannolikhet är $P(\text{summan är } 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

(c) Summan är udda:

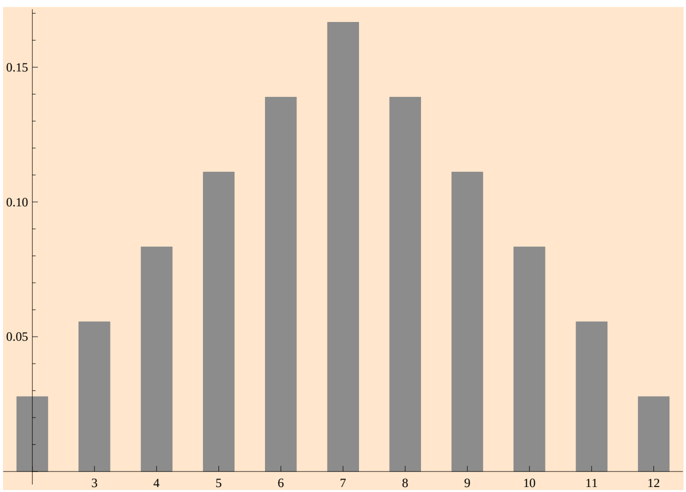
$$G = 2{+}4{+}6{+}4{+}2 = 18,\ M = 36 \Longrightarrow P(\text{summan är udda}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}\,.$$

Summan är jämn:

$$G = 1{+}3{+}5{+}5{+}3{+}1 = 18,\ M = 36 \Longrightarrow P(\text{summan är udda}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}\,.$$

Kommentarer

- Observera att $P(\text{summa} = x)$ inte är likformig, d.v.s. $P(\text{summa} = x)$ är olika för olika $x = 2, 3..., 12$.
- Vi inför en *stokastisk variabel*, här betecknad ξ med betydelsen $\xi =$summan av tärningskasten(-s poäng).
- Sannolikheterna fördelar sig som i figuren.



Frekvensfunktion (Probability density function) för summan av två kast med en tärning (eller ett kast med två tärningar).