1 Föreläsning X

1.1 Blandade problem

1. Vid tillverkning av en viss typ av cylinder är dess diameter $\xi \in \mathrm{N}(49.50, 0.20)$ (mm). Cylindern skall passa i ett cirkulärt hål med diameter $\zeta \in \mathrm{N}(50.0, 0.21)$ (mm).

   (a) Man vill att hålet är större än cylindern och samtidigt att hålet minus cylindern är mindre än 0.3 (mm). Beräkna sannolikheten för denna händelse!

   (b) Beräkna sannolikheten i (a), cylinderns diameter är 49.50 mm.

   (c) Beräkna sannolikheten för att $|\zeta - \xi| < 0.3$.

   (d) * I stället för standardavvikelserna 0.20 och 0.21 låt σ vara den sammanlagda standardavvikelsen för $\zeta - \xi$ och bestäm det värde på σ, som maximerar $P(0 < \zeta - \xi < 0.3)$.

   Lösning

   (a)
   $$\zeta - \xi \in \mathrm{N}(50.0 - 49.50, \sqrt{0.20^2 + 0.21^2}) = \mathrm{N}(0.50, 0.29).$$
   Händelse kan skrivas
   $$\{0 < \zeta - \xi < 0.3\} = \left\{ -\frac{0.5}{0.29} < \underbrace{\frac{\zeta - \xi - 0.5}{0.29}}_{\in \mathrm{N}(0,1)} < \frac{0.3 - 0.5}{0.29} \right\}.$$
   Sannolikheten för denna händelse är alltså
   $$P := \Phi\left(-\frac{0.2}{0.29}\right) - \Phi\left(-\frac{0.5}{0.29}\right).$$
   Nu är
   $$\Phi(-b) - \Phi(-a) = 1 - \Phi(b) - (1 - \Phi(a)) = \Phi(a) - \Phi(b).$$
   Sannolikheten är därmed
   $$P = \Phi\left(\frac{0.5}{0.29}\right) - \Phi\left(\frac{0.2}{0.29}\right) = 0.957659 - 0.754794 = 0.20\,.$$

   (b) Sannolikheten i (a), om cylinderns diameter är 49.50 mm:
   $$\{0 < \zeta - 49.50 < 0.3\} = \{49.5 < \zeta < 49.8\}.$$
   Motsvarande sannolikhet är
   $$Q = \Phi\left(-\frac{0.2}{0.21}\right) - \Phi\left(-\frac{0.5}{0.21}\right) = \Phi\left(\frac{0.5}{0.21}\right) - \Phi\left(\frac{0.2}{0.21}\right) = 0.991366 - 0.829548 = 0.16.$$

   (c) Sannolikheten för att $|\zeta - \xi| < 0.3$. Denna händelse kan skrivas
   $$\{-0.3 < \zeta - \xi < 0.3\}$$
   med sannolikhet
   $$\Phi\left(\frac{0.3 - 0.5}{0.29}\right) - \Phi\left(\frac{-0.3 - 0.5}{0.29}\right) = \Phi\left(\frac{0.8}{0.29}\right) - \Phi\left(\frac{0.2}{0.29}\right) = 0.24\,.$$

   (d) * För att få större värde på sannolikhet i (a), kan man försöka maximera ($s = \sigma$)
   $$P(s) := \Phi\left(-\frac{0.2}{s}\right) - \Phi\left(-\frac{0.5}{s}\right)$$
   m.a.p. s. Maxium ges av $s = 0.3385$. Motsvarande sannolikhet är (bara) 0.21 .

2. Antag att $\xi_j \in \exp(\lambda_j)$, $j = 1, 2$ och oberoende. Vilken fördelning har

   (a) $\min(\xi_1, \xi_2)$?

   (b) Bestäm frekvensfunktionen för $a \cdot \xi_1$, $a > 0$.

   Lösning

   (a) Vi vet att $P(\xi_j > t) = e^{-\lambda_j t}$. Nu är

   $$\begin{aligned} \{\min(\xi_1, \xi_2) > t\} &= \{\xi_1 > t \text{ och } \xi_2 > t\} = \{\xi_1 > t\} \cap \{\xi_2 > t\} \Longrightarrow \\ P(\{\min(\xi_1, \xi_2) > t\}) &= \{\text{ober.}\} = P(\xi_1 > t) \cdot P(\xi_2 > t) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}. \end{aligned}$$

   Alltså är $\min(\xi_1, \xi_2)$ exponentialfördelad med parameter $\lambda_1 + \lambda_2$.

   (b) Antag att $a > 0$. Bestäm frekvensfunktionen för $a \cdot \xi_1 \ldots$
   Fördelningsfunktionen är

   $$F_a(t) = P(a\xi > t) = P(\xi > t/a) = e^{-\lambda_1 \cdot t/a} = e^{-\lambda/a\, t}.$$

   Alltså är $a\,\xi \in \exp(\lambda_1/a)$.

3. (Kombinatorik) I en påse finns 7 röda och 4 gula och i övrigt identiska kulor. Man tar 5 kulor.

   (a) Vad är sannolikheten att få exakt två röda?

   (b) Vad är sannolikheten att få minst två röda?

   Lösning

   (a) Vi beräknar sannolikheten som $\dfrac{g}{m}$.

   $$m = \binom{11}{5} = 462 \text{ och } g = \binom{7}{2}\binom{4}{3} = 84 \Longrightarrow p = \frac{84}{462} = \frac{2}{11}\,.$$

   Sannolikheten att få exakt två röda är $\dfrac{2}{11}$.

   (b) För sannolikheten q att få minst två röda har g fem termer. För komplementhändelsens sannolikhet behövs endast en. Dess täljare är

   $$\binom{7}{1}\binom{4}{4} \Longrightarrow q = 1 - \frac{7}{462} = \frac{65}{66}\,.$$

Sammanfattning av kursens första del