# 1 Föreläsning II, Kombinatorik, LMA201 och LMA521

**Ex 1** Hur många fotbollmatcher spelas under en enkelturnering med $n$ lag?

**Lösning:**

Vi numrerar lagen $1,\ 2,\ ...,n$. Lag 1 möter $n-1$ lag.
Lag 2 möter ytterligare $n-2$ lag, eftersom lag 1 och 2:s möte redan är räknad.
Lag 3 möter ytterligare $n-3$ lag, eftersom lag 2, lag 2 och lag 3:s möten redan är räknade.
Vi får totalt

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+...+3+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

matcher (svar).

---

**Kommentarer**

- $$\frac{n(n-1)}{2}=\{\text{skrivs}\}=\binom{n}{2}$$

  och är en *binomialkoefficient*.

**Ex 2** Fyra personer hälsar på varandra (två och två) genom handskakning. Hur många handskakningar blir det?

**Lösning:**

M.h.a. förra exemplet blir det $\binom{4}{2}=\frac{4\cdot 3}{2}=6$.

---

**Ex 3** För en viss typ av fjällsemester ingår resa till fjället och fjällvandra. En person kan ta tåg, buss, bil eller flyg till starten för vandringen. Därefter kan personen välja mellan att gå, åka skidor eller cykla mountainbike (inte mycket till vandring men okej).

Hur många sammanlagda möjligheter finns det för resa+vandring?

**Lösning:**

Vi har 4 resesätt och 3 "vandringssätt", d.v.s. $4\cdot 3=12$ sätt, enligt *multiplikationsprincipen*.

---

**Ex 4** I hur många ordningar (*permutationer*) kan fyra personer står i kö?

**Lösning:**

Låt köplatserna vara $1, 2, 3$ och $4$. I köplats 1 kan fyra personer stå, i köplats 2 kan tre personer stå, i köplats 3 kan 2 personer stå och till sist kan din sista personen stå i köplats 4. Detta ger $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 =: 4!$ och läses *fyra-fakultet*.

---

**Kommentarer**

Exemplet ovan visar två saker.

- $0! := 1$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ och läses $n-$fakultet och ger antal ordningar som $n$ föremål kan ställas i.
- Att man *multiplicerar* för att få totala antal *permutationer,antal ordningar* enligt *multiplikationsprincipen*.
- $$7! = 5040,\ 10! = 3\,628\,800,\ 52! \approx 8 \cdot 10^{67}$$

**Ex 5** I en tävling finns 10 deltagare. På hur många sätt kan tävlingsresultatet se ut för plats 1 till 3?

**Lösning:**

Det finns 10 möjligheter för första plats, 9 för andra och 8 för tredje, alltså $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ olika utseenden på de tre första platserna.
$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ är antal permutationer av 3 element valda av 10.

---

**Ex 6** Vid en dopningskontroll av 10 löpare välja 3 ut. På hur många sätt kan det göras?

**Lösning:**

Den första kan väljas på 10 sätt, den andra på 9 och den tredje på 8 sätt. Detta ger, enligt multiplkationsprincipen $10 \cdot 9 \cdot 8$ sätt. De tre utvaldas *inbördes ordning* är dock inte intressant. Vi har $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ inbördes ordningar, som vi dividerar $10 \cdot 9 \cdot 8$ med. Detta ger

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{(10 \cdot 9 \cdot 8) \cdot (7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}{3! \cdot (7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120.$$

---

**Ex 7** För att utveckla $(a + b)^5$ får man termerna $c_k a^k b^{n-k}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Beräkna $c_3$.

**Lösning:**

$c3$ är koefficienten framför $a^3 b^2$. Nu är

$$(a + b)^5 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b)(a + b).$$

För att få just termen $c_3 a^3 b^2$ skall vi välja precis tre paranteser med $a$ och två paranteser med $b$. Detta går att göra på

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 = c_3 \text{ (Svar)}.$$

---

**Kommentarer**

- I exemplet med dopningstestet inser man att för varje val av tre personer (ober. av inbördes ordnng) väljer man samtidigt sju personer som inte testas. Det finns alltså lika många grupper på tre som på sju personer,alltså $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$. Vi oberverar att båda led kan skrivas som

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3! \cdot 7!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!}.$$

Allmänt följer det att

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \qquad k = 0, 1, 2, ..., n \tag{1}$$

- En koefficient som $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ kallas *binomialkoefficient*.
- Binomialkoefficient hänger ihop med *dragning utan återläggning och oberoende av ordningen.*
- En dragning av en lottorad är ett exempel på detta. Det finns

$$\binom{35}{7} = 6\,724\,520$$

sådana rader, d..v.s. sannolikheten $p$ att få alla 7 rätt på en rad är $p = \dfrac{1}{6724520} \approx 1.5 \cdot 10^{-7}$.

- Binomialteoremet följer av detta och säger att

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\,. \tag{2}$$

**Ex 8** Sätt

$$A := \{x_1, x_2, ..., x_n\}. \tag{3}$$

Ex.vis är

$$B = \{x_1, x_2\} \subset A\,.$$

(a) Hur många delmängder har $A$?

(b) Antag att $B$ nu är en godtycklig delmängd av $A$. Hur många inklusioner $C \subseteq B$ finns, där $B \subset A$?

**Lösning:**

(a) För att skapa en delmängd $B$ gäller att, för elementen $x_1, x_2, ..., x_n$ att $x_j \in B$ eller $x_j \notin B$. Detta kan välja på $2^n$ sätt, alltså $2^n$ delmängder $B$.

(b) Givet en övermängd $B \supset C$ med $k$ element, $k = 0, 1, 2, ..., n$. Den har enligt (a) $2^k$ delmängder $C$. Det finns $\binom{n}{k}$ del(över-)mängder $B$, alltså $\binom{n}{k} \cdot 2^k$

inklusioner och totalt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^k \cdot 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$$

inklusioner.

---