# 1 Föreläsning VI; S:a av flera stok. var.

Vi börjar med att definiera att två stokastiska variabler $\xi_1$ och $\xi_2$ är oberoende. Senare ger vi formler för väntevärde och varians för summor.

**Definition 1** $\xi_1$ och $\xi_2$ Är oberoende om

$$P(\xi_1 \leq x_1 \wedge \xi_2 \leq x_2) = P(\xi_1 \leq x_1) \cdot P(\xi_2 \leq x_2). \tag{1}$$

**Kommentarer**

- Definitionen av oberoende kan göras för fler stokastiska variabler.
- $\leq$ kan bytas mot $<$ eller $>$ eftersom vi har visat att

$$A \text{ och } B \text{ ober.} \Longleftrightarrow A \text{ och } B^c \text{ oberoende.}$$

**Ex 1** Låt $\xi$ vara antal datorer som säljs under en vecka i affären Datornörd. Vi antar vidare att frekvensfunktionen är

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(\xi = x)$ | 0.3 | 0.4 | 0.3 |

Vi låter vidare $\xi_1$ och $\xi_2$ vara antal sålda datorer under vecka 1 respektive 2. Det är rimligt att anta att dessa är oberoende och har samma fördelning d.v.s. som i tabellen ovan.
Frågan är nu vilken fördelning har för antal sålda datorer under en tvåveckorsperiod.

**Lösning:**

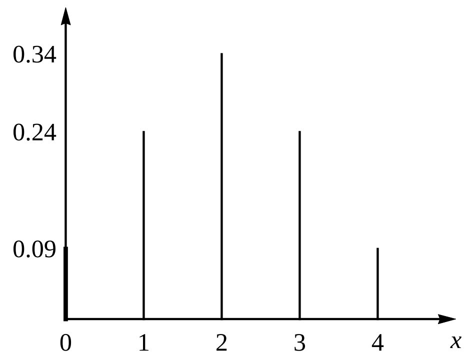
Det betyder att vi söker fördelningen hos summan $\eta = \xi_1 + \xi_2$. Det är självklart att $\eta$ kan anta värdena $0, 1, 2, 3, 4$. Hur fördelar sig sannolikheterna för $\eta$?

$$P(\eta = 0) = P(\xi_1 = 0 \wedge x_2 = 0) = \{\text{ober.}\} = 0.3^2 = 0.09.$$

$$\begin{aligned} P(\eta = 1) &= P((\xi_1 = 0 \wedge \xi_2 = 1) \vee (\xi_1 = 1 \wedge \xi_2 = 0)) = \\ &\quad \{\text{disj. och ober.}\} = 0.3 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.3 = 0.24 \end{aligned}$$

P.s.s. blir

$$P(\eta = 2) = 0.34, \quad P(\eta = 3) = 0.24 \text{ och } P(\eta = 4) = 0.09.$$



■

**Kommentarer**

- I någon mening är $\xi$ symmetrisk fördelad men även om så inte är fallet får $\xi_1 + \xi_2$ en frekvensfunktion som påminner om En normalfördelning.

**Ex 2** Vad är väntevärdet för $\xi$ (representerar både $\xi_1$ och $\xi_2$) och $\eta = \xi_1 + \xi_2$ i föregående exempel?

**Lösning:**

$$E(\xi) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 = 1$$

Då bör $\eta$ ha väntevärdet 2. Vi räknar dock ut det direkt.

$$E(\eta) = 0 \cdot 0.09 + 1 \cdot 0.24 + 2 \cdot 0.34 + 3 \cdot 0.24 + 4 \cdot 0.09 = 2.$$

■

---

**Sats 1** Låt $a$ och $b$ vara konstanter och $\xi_1$ och $\xi_2$ oberoende. Då är

$$\begin{array}{lrcl} i) & E(a\,\xi + b) & = & a\,E(\xi) + b \\ ii) & V(a\,\xi + b) & = & a^2 V(\xi) \\ iii) & E(\xi_1 + \xi_2) & = & E(\xi_1) + E(\xi_2) \\ iv) & V(\xi_1 + \xi_2) & = & V(\xi_1) + V(\xi_2) \end{array} \tag{2}$$

---

**Kommentarer**

- iii) gäller även om $\xi_1$ och $\xi_2$ är beroende.
- Variansen för $2\xi_1$ är större än variansen för $\xi_1 + \xi_2$, om de är oberoende och likafördelade:

$$V(2\xi_1) = 2^2 V(\xi_1) = 4V(\xi_1) \text{ men } V(\xi_1 + \xi_2) = 2V(\xi_1).$$

**Ex 3** (varför skillnaden för variansen mellan $2\xi_1$ och $\xi_1$ och $\xi_2$, där dessa stok. variabler är likafördelade och ober.)
Två brädor skall kapas vardera till längden 3.3 m. Låt $\xi_1$ och $\xi_2$ vara deras längder (Innan kapning), d.v.s. vi ser deras längder som stokastiska variabler med samma varians $\sigma^2$. De kan kapas med två olika sätt.

**Metod 1 De kapas oberoende av varandra.**
Variansen är då $V(\xi_1 + \xi_2) = V(\xi_1) + V(\xi_2) = 2\sigma^2$.

**Metod 2 De kapas samtidigt.**

Med detta menas att de läggs ovanför varandra och kapas sedan. Detta beskrivs av $2\xi_1$. Med formeln för vi variansen

$$2^2 \cdot V(\xi_1) = 4\sigma^2.$$

Frågan är varför $V(\xi_1 + \xi_2) < V(2\xi_1)$.

---

Vid metod 1 kapas de oberoende av varandra och då kan värdena på $\xi_1$ och $\xi_2$ ta ut varandra. å andra sidan, när de kapas samtidigt (metod 2), så får de *samma* längd och dessa tar *inte* ut varandra.

∎