1 Föreläsning IX

1.1 Intervallskattning av av σ^2 och σ för $\mathbf{N}(\mu, \sigma)$

Vi utgår från ett stickprov $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ där $\xi_k \in \mathrm{N}(\mu, \sigma)$.

$$\frac{(n-1){\sigma^2}^*}{\sigma^2} = \frac{\sum_{k=1}^n (\xi_k - \overline{\xi})^2}{\sigma^2} \in \chi^2_{n-1}\,. \tag{1}$$

- Vi utgår från nedanstående punktskattning av σ^2 som används då μ är okänd.

$${\sigma^2}^* = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n (\xi_k - \overline{\xi})^2. \tag{2}$$

- Uppåt begränsat intervallskattning av σ^2 och dito konfidensintervall
Ett sådant intervall av konfidensgrad $1-\alpha$ är

$$\left[0, \frac{(n-1){\sigma^2}^*}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right) \text{ respektive } \left[0, \frac{(n-1){\sigma^2}^*_{\text{obs}}}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right).$$

Intervallskattning och konfidensintervall för σ erhålls genom att dra roten ur båda intervallgränser.

- Nedåt begränsat intervallskattning av σ^2 och dito konfidensintervall

$$\left[\frac{(n-1){\sigma^2}^*}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}, \infty\right) \text{ respektive } \left[\frac{(n-1){\sigma^2}^*_{\text{obs}}}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}, \infty\right).$$

Intervallskattning och konfidensintervall för σ erhålls genom att dra roten ur båda intervallgränser.

- Tvåsidigt begränsat intervallskattning av σ^2 och dito konfidensintervall
Ett sådant intervall av konfidensgrad $1-\alpha$ är

$$\left[\frac{(n-1){\sigma^2}^*}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1){\sigma^2}^*}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right] \text{ respektive } \left[\frac{(n-1){\sigma^2}^*_{\text{obs}}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1){\sigma^2}^*_{\text{obs}}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

Intervallskattning och konfidensintervall för σ erhålls genom att dra roten ur båda intervallgränser.

Ex 1 Vid 25 mätningar av tryckhållfastheten hos betong fick man $\overline{x} = 5.6$ och $\sigma^2 = 0.44$ (givna i en engelsk enhet). Mätvärdena kan betraktas som ett observerat stickprov från en normalfördelning.

(a) Bestäm ett uppåt begr. konfidensintervall för σ^2 med konfidensgrad 99%.

(b) Bestäm ett tvåsidigt konfidensintervall för σ konfidensgrad 99%.

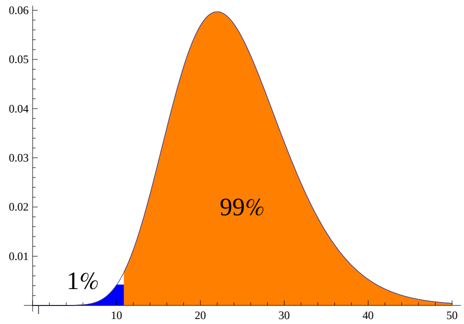
Lösning

(a) Ett uppåt begr. konfidensintervall för σ^2:
Vi behöver kvantilen

$$\chi^2_{1-0.01}(25-1) = \chi^2_{0.99}(25-1) = 10.9\,.$$

Konfidensintervallet är

$$\left[0, \frac{24\cdot 0.44}{10.9}\right] = [0, 0.97].$$



(b) Ett tvåsidig[1] konfidensintervall för σ:
Vi behöver kvantilerna

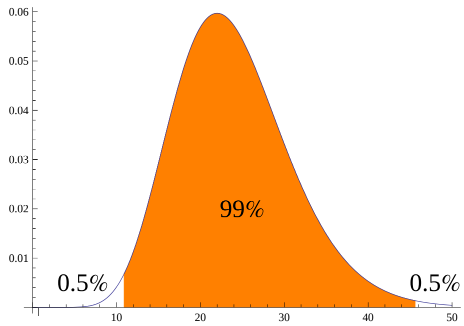
$\chi^2_{1-0.955}(25-1) = \chi^2_{0.005}(25-1) = 45.6$ och $\chi^2_{1-0.005}(25-1) = \chi^2_{0.995}(25-1) = 9.9$

Konfidensintervallet för σ är alltså

$$\left[\sqrt{\frac{24 \cdot 0.44}{45.6}}, \sqrt{\frac{24 \cdot 0.44}{9.9}}\right] = [0.481227, 1.0328].$$

Ett tvåsidigt konfidensintervall av konfidensgrad 99% för σ är

$$[0.48,\ 1.04]\,.$$



Frekvensfunktionen $f_{24}(x) = \dfrac{e^{-x/2}x^{11}}{c}$.

1.2 Repetition, betingad sannolikhet m.m.

Ex 2 Vid en kvalitetskontroll av solglasögon är sannolikheten att ett defekt par godkänns 1%. Sannolikheten att ett korrekt par underkänns är 10%. Man räknat dessutom med att 97% av glasögonen är korrekta.

(a) Vad är sannolikheten att ett korrekt par godkänns?

(b) Vad är sannolikheten att ett godkänt par är korrekt?

Lösning

Vi inför händelserna

$$\begin{aligned} K &= \text{Ett par är korrekt.} \\ G &= \text{Ett par godkänns.} \end{aligned}$$

Vi har följande betingade sannolikheter.

$$\begin{aligned} P(G|K^c) &= 0.01 \\ P(G^c|K) &= 0.10 \\ P(K) &= 0.97 \end{aligned}$$

[1]Intervallet kallas också *symmetriskt* även om grafen av frekvensfunktionen inte är symmetrisk.

(a) Sannolikheten att ett korrekt par godkänns är

$$P(G|K) = 1 - P(G^c|K)01 - 0.10 = 0.90\,.$$

(b) Sannolikheten att ett godkänt par är korrekt:

$$P(K|G) = \frac{P(G|K) \cdot P(K)}{P(G)}\,.$$

Det som återstår är att beräkna nämnaren.

$$\begin{aligned} P(G) &= P(G \cap K) + P(G \cap K^c) = P(G|K)P(K) + P(G|K^c)P(K^c) = \\ &= 0.90 \cdot 0.97 + 0.01 \cdot 0.03 = 0.8733\,. \end{aligned}$$

Sökt sannolikhet är

$$P(K|G) = \frac{0.90 \cdot 0.97}{0.8733} = 0.999656\,.$$

Ex 3 Två personer spelar tärning genom att kasta en tärning varannan gång. Den som först får en sexa vinner. Vad är sannolikheten att den som börjar vinner?

Lösning

Sätt

$$\begin{aligned} A &= \text{händelsen att person 1 vinner,} \\ A^c &= \text{händelsen att person 2 vinner och} \\ B &= \text{händelsen att person 1 får en sexa vid första kast.} \end{aligned}$$

Om person ej får en sexa vid första kast, befinner sig person 2 i samma situation som person 1. Vi har att

$$P(A) = P(A^c|B^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(B^c|A^c) \cdot P(A^c)}{1 - P(B)}.$$

Nu är $P(B^c|A^c) = 1$. Detta ger

$$P(A) = \frac{1 \cdot (1 - P(A))}{1 - P(B)} \text{ och } P(B) = \frac{1}{6}\,.$$

Sätt $P(A) = p$. Vi får ekvationen

$$p = \frac{1-p}{5/6} \iff \frac{5p}{6} = 1 - p \iff \frac{11p}{6} = 1 \iff p = \frac{6}{11}\,.$$

Kommentarer

- Det är inte så enkelt att händelsen att person 2 vinner är A^c. Det finns även en händelse att ingen vinner. Dess sannolikhet är dock 0.

Ex 4 En person ringer hem till en familj, som har två barn. En dotter svarar. Vad är sannolikheten att den andra också är en flicka?
Svar: $\frac{1}{3}$.