Tillämpad matematisk statistik LMA521 Tentamen 20170314 lösningar

1. Antal bilar, som kommer in i en rondell är poissonfördelat med väntevärde $\lambda = 2.5$ per minut.

   (a) Sätt $n = 60$ och $\xi_j \in \text{Po}(2.5)$. Vi approximerar (CGS)

   $$\zeta := \sum_{j=1}^{60} \xi_j \sim \text{N}(\mu = 60 \cdot 2.5, \sigma = \sqrt{60 \cdot 2.5}).$$

   Sökt sannolikhet är

   $$P(\zeta > 160) \approx 1 - \Phi\left(\frac{160 - 150}{\sqrt{2.5 \cdot 60}}\right) = 1 - \Phi(0.8165) \approx 0.207 \text{ (Svar (a))}$$

   3p

   (b) Sannolikheten att det i genomsnitt kommer in fler än 3 bilar per minut i rondellen ges approximativt av

   $$\mathbb{P}(\zeta > 3 \cdot 60) = 1 - \Phi\left(\frac{180 - 150}{\sqrt{150}}\right) = 1 - \Phi(2.449) \approx 0.0072.$$

   Svar: Sannolikheten att det kommer i genomsnitt 3 bilar per minut in i rondellen är 0.72%. 3p

2. Följande funktion $f(x) = \begin{cases} 12(x^2 - x^3), & \text{om } 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 0, & \text{f.ö.} \end{cases}$ är given.

   (a) $f(x) = x^2(1 - x) \geq 0$ för $0 \leq x \leq 1$.

   $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 12 \int_0^1 (x^2 - x^3)dx = 12 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 12\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1.$$

   är därmed en frekvensfunktion. 2p

   (b) Väntevärde är

   $$\mu = 12 \int_0^1 x(x^2 - x^3)dx = 12\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

   Standardavvikelse för fördelningen:

   $$\sqrt{12 \int_0^1 x^2(x^2 - x^3)dx - \mu^2} = \sqrt{12\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{2}{5} - \frac{9}{25}} = \frac{1}{5}.$$

   4p

3. Låt $\xi_j \in \text{N}(\mu, \sigma)$, $j = 1, 2, ..., 5$. Vi vet att $\overline{\xi} \in \text{N}(\mu, \sigma/\sqrt{5})$. Medelvärdet av dessa är $\overline{x} = 24.0$. Ett (symmetriskt) 95%:s konfidensintervall för μ då

(a) $\sigma = 1.8$ och $\lambda_{0.025} = 1.96$.

$$[\overline{x} - \sigma \cdot \lambda_{0.025}/\sqrt{5}, \overline{x} + \sigma \cdot \lambda_{0.025}/\sqrt{5}] = [22.4222, 25.5778]$$

2p

(b) σ okänd: Vi punktskattar σ med s.

$$s = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2.12132...$$

Dessutom utnyttjar vi $t-$fördelningen:

$t_{0.025} = 2.78$ som ger intervallet $[24-2.78 \cdot 2.12/\sqrt{5}, 24+2.78 \cdot 2.12/\sqrt{5}] = [21.3643, 26.6357]$.

4p

4. Låt I stå för händelsen inbrott och L stå för händelsen larm under en given natt. Då gäller

$$P(L|I) = 0.99, \quad P(L|I^c) = 0.02, \quad P(I) = 0.001\,.$$

En natt ringer larmet. Sannolikheten som söks är

$$P(I|L) = \frac{P(I \cap L)}{P(L)}.$$

$$P(I \cap L) = P(L|I) \cdot P(I) = 0.99 \cdot 0.001 = 0.00099.$$

$$P(L) = P(L \cap I) + P(L \cap I^c) = P(L|I)P(I) + P(L|I^c)(1 - P(I)) = 0.02097$$

som ger

$$P(I|L) = \frac{P(I \cap L)}{P(L)} = \frac{0.00099}{0.02097} = \frac{99 \cdot 10^{-5}}{2097 \cdot 10^{-5}} \approx 4.72\%.$$

5p

5. En urna A innehåller fyra röda och 3 gula kulor.

(a) En kula väljs slumpmässigt. Låt ξ_1 vara antal röda kulor vid denna dragning. Sannolikheten att den är röd är

$$P(\xi_1 = 1) = \frac{4}{7}.$$

1p

(b) En annan urna B innehåller två röda och tre gula kulor. Sätt ξ_2 =antal röda kulor vi får i denna andra dragning. Sannolikheten att man då får två röda kulor är

$$\begin{aligned} P(\xi_2 = 2) &= P(\xi_1 = 0 \cap \xi_2 = 2) + P(\xi_1 = 1 \cap \xi_2 = 2) = \\ &= P(\xi_2 = 2|\xi_1 = 0) \cdot P(\xi_1 = 0) + P(\xi_2 = 2|\xi_1 = 1) \cdot P(\xi_1 = 1) = \\ &= \frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} \cdot \frac{3}{7} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} \cdot \frac{4}{7} = \frac{1 \cdot 3}{7 \cdot 15} + \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 15} = \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

4p

6. (a) Medelvärdesdiagram:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{49.34 + 48.99 + 51.64 + 46.53 + 49.09}{5} = 49.118$$
$$\bar{R} = \frac{11.27 + 9.60 + 12.07 + 9.52 + 8.01}{5} = 10.09$$
$$S_{\text{ö}} = \bar{\bar{x}} + A_2\bar{R} = 49.118 + 0.483 \cdot 10.09 = 49.118 + 4.873 = 53.991$$
$$S_{\text{u}} = \bar{\bar{x}} - A_2\bar{R} = 49.118 - 0.483 \cdot 10.09 = 49.118 - 4.873 = 44.245$$

R-diagram:

$$S_{\text{ö}} = D_4\bar{R} = 2.004 \cdot 10.09 = 20.22$$
$$S_{\text{u}} = D_3\bar{R} = 0 \cdot 10.09 = 0$$

Ja vi är under statistisk kontroll eftersom alla uppmätta $\bar{x}$- och R-värden var inom styrgränserna. 3p

(b)

$$C_p = \frac{T_{\text{ö}} - T_u}{6\sigma} = \frac{75 - 40}{6 \cdot 4.3} = \frac{35}{25.8} = 1.357$$
$$M = \frac{T_{\text{ö}} + T_u}{2} = 57.5$$
$$CM = 2\frac{|M - \mu|}{T_{\text{ö}} - T_u} = 2\frac{|57.5 - 50.1|}{75 - 40} = 0.423$$
$$C_{pk} = C_p(1 - CM) = 1.357 \cdot 0.577 = 0.783$$

$C_p > 1.33$ så spridningen är tillräckligt liten. $C_{pk} < 1.33$ så processen är för dåligt centrerad för att detta i kombination med spridningen skall ge rimlig sannolikhet att leva upp till kravspecifikationerna. Vi bör föreslå att processen stoppas för analys och kalibration. 2p

7. Ett elektriskt system fungerar om komponent B och C fungerar eller om komponent A fungerar... Händelsen att A fungerar efter ett år betecknas A och p.s.s. för B och C.
Händelserna A och C är oberoende. Följande sannolikheter gäller (för ett år).

$$P(A) = P(B) = P(C) = 0.98, \quad P(B \cap C) = 0.96$$

och sannolikheten för att *minst* en komponent inte fungerar är 0.05.

(a) Vi har att $P(A^c \cup B^c \cup C^c) = 0.05$. Nu är

$$P(A^c \cup B^c \cup C^c) = P((A \cap B \cap C)^c) = 1 - P(A \cap B \cap C) = 0.05,$$

så att $P(A \cap B \cap C) = 0.95$. Sannolikheten att systemet fungerar (efter ett år) kan skrivas

$$P(A \cup (B \cap C)) = P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap (B \cap C)) = 0.98 + 0.96 - 0.95 = 0.99.$$

3p

(b) Sannolikheten att systemet fungerar, om komponent C fungerar (efter ett år) kan uttryckas som

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B|C) &= \frac{P((A \cup B) \cap C)}{P(C)} = \frac{P((A \cap C) \cup (B \cap C))}{P(C)} = \\
&= \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \\
&= \frac{0.98^2 + 0.96 - 0.95}{0.98} = 0.990204 \approx 0.99
\end{aligned}
$$

3p

8. (a) Vad är acceptanssannolikheten om det riktiga antalet defekta tandpetare är 90? Skriv ner de approximationer du eventuellt väljer att göra.

$N = 10^3, n = 20, c = 3,\ p = \frac{90}{1000} = 9\%$. Eftersom $\frac{20}{1000} = 2\% < 10\%$ så kan vi approximera med binomialfördelning ($\xi \sim Bin(n = 20, p = 9\%)$).

$$L(9\%) = \mathbb{P}(\xi \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} \binom{20}{k} 0.09^k 0.91^{20-k}$$

$$= 0.91^{20} + 20 \cdot 0.09 \cdot 0.91^{19} + \frac{20 \cdot 19}{2} 0.09^2 \cdot 0.91^{18} + \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2} 0.09^3 \cdot 0.91^{17}$$

$$= 15.17\% + 30.00\% + 28.18\% + 16.72\% = 90.07\%$$

2p

(b) Vid senare eftertanke kommer ledningen på att de nog vill genomföra en dubbel provtagningsplan istället. Här väljer de att kontrollera 10 stycken tandpetare först. Om ingen visar sig vara defekt så accepterar man partiet. Om 1 eller 2 tandpetare är defekta går man till urval 2. I urval två drar man 10 nya tandpetare och accepterar partiet om totalt antal defekta tandpetare från båda urvalen var mindre än 5.

Vad är acceptanssannolikheten med den dubbla planen om det riktiga antalet defekta tandpetare fortfarande är 90?

$n_1 = 10, n_2 = 10, c_1 = 0, r_1 = 3, c_2 = 4, r_2 = 5, p = 9\%$

Vi kan fortfarande anta binomialapproximation så:

$$\mathbb{P}(\text{acceptera}) = \mathbb{P}(\xi_1 = 0) + \sum_{k=1}^{2} \left(\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 \leq 4 | \xi_1 = k)\mathbb{P}(\xi_1 = k)\right)$$

$$= \mathbb{P}(\xi_1 = 0) + \sum_{k=1}^{2} \left(\sum_{i=0}^{4-k} \mathbb{P}(\xi_2 = i) \right) \mathbb{P}(\xi_1 = k)$$

$$\mathbb{P}(\xi = 0) = p_0 = \binom{10}{0} 0.09^0 0.91^{10} = 38.94\%$$

$$\mathbb{P}(\xi = 1) = p_1 = \binom{10}{1} 0.09^1 0.91^9 = 38.51\%$$

$$\mathbb{P}(\xi = 2) = p_2 = \binom{10}{2} 0.09^2 0.91^8 = 17.14\%$$

$$\mathbb{P}(\xi = 3) = p_3 = \binom{10}{3} 0.09^3 0.91^7 = 4.52\%$$

$$\mathbb{P}(\text{acceptera}) = p_0 + p_1 \cdot (p_0 + p_1 + p_2 + p_3) + p_2 \cdot (p_0 + p_1 + p_2) = 0.3894$$
$$+ 0.3851 \cdot (0.3894 + 0.3851 + 0.1714 + 0.0452) + 0.1714 \cdot (0.3894 + 0.3851 + 0.1714)$$
$$= 38.94\% + 38.17\% + 16.21\% = 93.32\%$$

3p

(c) Vad är det genomsnittsliga provuttaget för den dubbla provtagningsplanen?

$$ASN = n_1 + n_2 \mathbb{P}(\text{avgör i urval 2})$$
$$\mathbb{P}(\text{avgör i urval 2}) = \mathbb{P}(1 \le \xi_1 \le 2) = p_1 + p_2 = 38.51\% + 17.14\% = 55.65\%$$
$$\Rightarrow ASN = n_1 + 0.5565 \cdot n_2 = 10 + 5.565 = 15.565$$

1p

9. (a)

$$l_A = \frac{54+73+55+78}{4} - \frac{53+75+52+77}{4} = 0.75$$
$$l_{AB} = \frac{53+73+52+78}{4} - \frac{54+75+55+77}{4} = -1.25$$
$$l_{ABC} = \frac{54+75+52+78}{4} - \frac{53+73+55+77}{4} = 0.25$$

3p

(b) Man ser att teckenkolumnen motsvarar kolumnen för trefaktorsamspelet ABC. Man har alltså använt generatorn $D = ABC$. Vi får den definierande relationen $I = ABCD$ som då har ett ord, nämligen $ABCD$.

Alias till faktor A blir då $A \cdot I = AABCD = BCD$. 2p