Tillämpad matematisk statistik LMA521
Lösningar Tentamen 2017-04-12

Tid: 8.30-12.30. **Tentamensplats:** Lindholmen
Hjälpmedel: Kursboken **Matematisk Statistik** av Ulla Dahlbom. Formelsamlingen **Tabell- och formelsamling i matematisk statistik, försöksplanering och kvalitetsstyrning** av Håkan Blomqvist. Boken och formelsamlingen får ej innehålla extra anteckningar, men understrykningar, sticks och markeringar är tillåtna. **Chalmersgodkänd räknare.**
Examinator: Johan Tykesson
Telefonvakt/jour: Ivar Simonsson, 0738027538. Till salen ca 9.30 och 11.30
Till varje uppgift skall fullständig lösning lämnas!
OBS: text på tre sidor!
Betygsgränser: För betyg 3, 4 resp. 5 krävs minst 20, 30 resp. 40 poäng.

1. (a)

$$P(\text{partiet accepteras}) = \frac{18 \times 17}{20 \times 19} = \frac{152}{190} \approx \boxed{0.8053.}$$

   (b) Låt ξ = antalet undersökta flodhästar. Det gäller att $P(\xi = 2) = 0.8053$ och att $P(\xi = 20) = 1 - 0.8053 = 0.1947$. Så

$$ATI = E(\xi) = 2 \times 0.8053 + 20 \times 0.1947 = \boxed{5.5046},$$

   och

$$E(\xi^2) = 2^2 \times 0.8053 + 20^2 \times 0.1947 = 81.1012,$$

   och till sist

$$\text{Var}(\xi) = E(\xi^2) - E(\xi)^2 = 81.1012 - 5.5046^2 = \boxed{50.8006.}$$

2. Låt $A = \{\text{skyldig}\}$ och $B = \{\text{döms}\}$. Vi vet att $P(A) = 0.7$, $P(B|A) = 0.59$, $P(B|A^c) = 0.004$. Vi söker $P(A^c|B)$. Bayes sats ger att

$$\begin{aligned} P(A^c|B) = \frac{P(B|A^c)P(A^c)}{P(B)} &= \frac{P(B|A^c)P(A^c)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)} \\ &= \frac{0.004 \times 0.3}{0.59 \times 0.7 + 0.004 \times 0.3} \approx \boxed{0.0029.} \end{aligned}$$

3. Vi har att $\bar{\bar{x}} \approx 6.71$ och $\bar{R} \approx 0.38$. Eftersom $n = 3$ ger tabell att $A_2 = 1.023$, $D_3 = 0$ och $D_4 = 2.575$. Gränserna för $\bar{x}$-diagrammet blir alltså

$$\bar{\bar{x}} \pm A_2\bar{R} = 6.71 \pm 0.3887 = [6.3213, 7.0987]$$

   och för R-diagrammet

$$[D_3\bar{R}, D_4\bar{R}] = [0, 0.9785].$$

   Eftersom till exempel $\bar{x}$ värdet för provgrupp 4 är större än 7.0987 ser vi att processen inte är i statistisk kontroll. Man bör undersöka processen.

4. (a) Vi får att $\bar{x} = 23.8$, $s = 1.9975$, antalet frihetsgrader $n - 1 = 2$, $\alpha = 0.05$ samt att $t_{0.025}(2) = 4.3$ (enligt rad 2, kolumn 0.05 i t-tabellen). Konfidensintervallet blir

$$\bar{x} \pm \frac{t_{0.025}(2)s}{\sqrt{3}} = \boxed{23.8 \pm 4.959.}$$

(b) χ^2-tabellerna (rad 2, kolumn 0.025 respektive 0.975) ger $\chi^2_{0.025} = 7.378$ och $\chi^2_{0.975} = 0.0506$. Intervallet blir

$$\left[\sqrt{\frac{2 \times 1.9975^2}{7.378}}, \sqrt{\frac{2 \times 1.9975^2}{0.0506}}\right] = \boxed{[1.04, 12.5582]}.$$

5. (a)

$$E(\xi) = \int_0^1 x(6x - 6x^2)dx = ... = \boxed{1/2.}$$

$$E(\xi^2) = \int_0^1 x^2(6x - 6x^2)dx = ... = 3/10.$$

$$S(\xi) = \sqrt{\text{Var}(\xi)} = \sqrt{3/10 - (1/2)^2} \approx \boxed{0.2236.}$$

(b)

$$E(\eta) = 9.75 + 0.5E(\xi) = \boxed{10.}$$

$$S(\eta) = 0.5S(\xi) = \boxed{0.1118}.$$

(c)

$$P(\eta \leq 10.1) = P(9.75 + 0.5\xi \leq 10.1) = P(\xi \leq 0.7)$$

$$\int_0^{0.7} f(x)dx = ... = \boxed{0.784.}$$

6. (a)

$$l_A = \frac{54 + 78 + 55 + 79 - 53 - 77 - 53 - 77}{4} = \boxed{1.5}$$

$$l_{ABC} = \frac{54 + 77 + 53 + 79 - 53 - 78 - 55 - 77}{4} = \boxed{0}$$

(b) $I_1 = ABCD$, $I_2 = BCE$, $I_3 = ACF$, $I_4 = I_1I_2 = ADE$, $I_5 = I_1I_3 = BDF$, $I_6 = I_2I_3 = ABEF$, $I_7 = I_1I_2I_3 = CDEF$. Eftersom kortaste order har längd 3 blir upplösningen $\boxed{3}$. Alias till A blir $\boxed{BCD, ABCE, CF, DE, ABDF, BEF, ACDEF}$.

7. (a) Låt ξ =restiden.

$$\begin{aligned} P(\text{kommer i tid}) &= P(\xi \leq 25) \\ &= P\left(\frac{\xi - 21}{3} \leq \frac{25-21}{3}\right) = \Phi(4/3) = \boxed{0.9082}. \end{aligned}$$

(b) Låt η = antalet dagar hon kommer i tid. Då är η Bin(n=200,p=0.9082). Eftersom $np(1-p) = 16.6746 > 10$ är η approximativt $N(np, \sqrt{np(1-p)}) = N(181.64, 4.08345)$. Vi får att

$$P(\eta \leq 190) = P\left(\frac{\eta - 181.64}{4.0835} \leq \frac{190 - 181.64}{4.0835}\right) = \Phi(2.05) = \boxed{0.9798}.$$

8. (a) Additions-satsen och oberoende ger att

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.4 + 0.5 - 0.4 \times 0.5 = \boxed{0.7} \end{aligned}$$

(b) Eftersom A och C är disjunkta inser man (rita Venn-diagram!) att

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup (B^c \cap C).$$

Eftersom $A \cup B$ och $B^c \cap C$ är disjunkta får vi att

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(B^c \cap C),$$

vilket ger

$$P(B^c \cap C) = P(A \cup B \cup C) - P(A \cup B) = 0.9 - 0.7 = \boxed{0.2}$$

9. (3 poäng) Laat $\gamma = \xi\eta$. Vi ser att γ är en diskret stokastisk variabel som kan anta värdena 0 eller 1, och att $\gamma = 1$ om och endast om $\xi = \eta = 1$. Vi får att

$$P(\gamma = 1) = P(\xi = \eta = 1) = P(\xi = 1)P(\eta = 1) = 0.5 \times 0.5 = 0.25$$

eftersom ξ och η är oberoende. Alltså blir $P(\gamma = 0) = 1 - P(\gamma = 1) = 0.75$. Till slut får vi

$$\begin{aligned} E(2^{\xi\eta}) = E(2^{\gamma}) &= 2^0 \times P(\gamma = 0) + 2^1 \times P(\gamma = 1) \\ &= 1 \times 0.75 + 2 \times 0.25 = \boxed{1.25.} \end{aligned}$$

Lycka till!