LMA200, LMA201, LMA521
Lösningar Tentamen 2017-08-24

- **Uppgift 1 för LMA521,LMA200,LMA201**

  (a)
  $$E(\xi) = \int_0^1 5x^5 dx = \boxed{5/6}.$$
  $$E(\xi^2) = \int_0^1 5x^6 dx = 5/7.$$
  $$\sigma = \sqrt{E(\xi^2) - E(\xi)^2} \approx \boxed{0.1409}$$

  (b)
  $$P(0.7 \le \xi \le 0.9) = \int_{0.7}^{0.9} 5x^4 dx \approx \boxed{0.4224}$$

  (c)
  $$P(0.7 \le \xi \le 0.9 \,|\, \xi \ge 0.7) = \frac{P(0.7 \le \xi \le 0.9)}{P(\xi \ge 0.7)} = \frac{\int_{0.7}^{0.9} 5x^4 dx}{\int_{0.7}^{1} 5x^4 dx} \approx 0.5078$$

- **Uppgift 2 för LMA521,LMA200,LMA201**

  (a) Mätvärdena ger att $\bar{x} = 250.833$ och $s = 1.81751$. Antalet frihetsgrader $n - 1 = 2$, $\alpha = 0.01$ så $t_{\alpha/2}(2) = t_{0.005}(2) = 9.93$ (enligt rad 2, kolumn 0.01 i t-tabellen). Konfidensintervallet blir
  $$\bar{x} \pm \frac{t_{0.005}(2)s}{\sqrt{3}} = \boxed{250.833 \pm 10.4199.}$$

  (b) χ^2-tabellerna (rad 2, kolumn 0.025 respektive 0.975) ger $\chi^2_{0.025} = 7.378$ och $\chi^2_{0.975} = 0.0506$. Två sidigt intervall blir
  $$\left[\sqrt{\frac{2 \times 1.81751^2}{7.378}}, \sqrt{\frac{2 \times 1.81751^2}{0.0506}}\right] = \boxed{[0.946285, 11.4266]}.$$

- **Uppgift 3 för LMA521,LMA200,LMA201**

  $$\mu = E(\xi) = 0 \times 0.01 + 1 \times 0.1 + 2 \times 0.89 = 1.88.$$
  $$E(\xi^2) = 0^2 \times 0.01 + 1^2 \times 0.1 + 2^2 \times 0.89 = 3.66$$
  $$\sigma = \sqrt{3.66 - 1.88^2} = 0.354401.$$

  Låt T vara antalet paket ätna under 100 dagar. Enligt centrala gränsvärdessatsen är T approximativt $N(100\mu, 10\sigma) = N(188, 3.54401)$. Alltså blir
  $$P(T > 186) = 1 - P(T \le 186) = 1 - P(\frac{T - 188}{3.54401} \le \frac{186 - 188}{3.54401})$$
  $$= 1 - \Phi(-0.564332) = 1 - (1 - \Phi(0.564332)) = \Phi(0.564332) = \boxed{0.7123}.$$

- **Uppgift 4 för LMA201, LMA521, Uppgift 5 för LMA200**

  (a) Additionssatsen för tre händelser samt oberoende ger att

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= 0.1 + 0.2 + 0.3 \\ &- 0.1 \times 0.2 - 0.1 \times 0.3 - 0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.2 \times 0.3 = \boxed{0.496.} \end{aligned}$$

  (b) $P(\text{ingen inträffar}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = \boxed{0.504.}$

  (c)

$$\begin{aligned} P(\text{exakt en inträffar}) &= P(A \cap B^c \cap C^c) + P(A^c \cap B \cap C^c) + P(A^c \cap B^c \cap C) \\ &= 0.1 \times 0.8 \times 0.7 + 0.9 \times 0.2 \times 0.7 + 0.9 \times 0.8 \times 0.3 = \boxed{0.398.} \end{aligned}$$

- **Uppgift 4 för LMA200**

  (a)

$$P(\text{samtliga dragna defekta}) = \frac{7}{11} \times \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{7}{33} \approx \boxed{0.2121}.$$

  (b)

$$P(\text{exakt två dragna defekta}) = \frac{\binom{4}{2}\binom{7}{1}}{\binom{11}{3}} = \frac{14}{55} \approx \boxed{0.254545.}$$

- **Uppgift 5 för LMA201, LMA521, Uppgift 6 för LMA200**

  Låt A vara händelsen att lampan är av typ A, B vara händelsen att lampan är av typ B, samt C vara händelsen att lampan vara längre än 210 timmar. Vi får att

$$P(C|A) = \int_{210}^{\infty} \frac{e^{-x/200}}{200}\,dx = e^{-21/20},$$

$$P(C|B) = \int_{210}^{\infty} \frac{e^{-x/300}}{300}\,dx = e^{-7/10}.$$

  Dessutom gäller att $P(A) = 3/5$ och $P(B) = 2/5$. Alltså blir

$$P(C) = P(C|A)P(A) + P(C|B)P(B) = \frac{3e^{-21/20}}{5} + \frac{2e^{-7/10}}{5}.$$

  Till slut får vi enligt Bayes sats att

$$P(B|C) = \frac{P(C|B)P(B)}{P(C)} = \frac{\frac{2e^{-7/10}}{5}}{\frac{3e^{-21/20}}{5} + \frac{2e^{-7/10}}{5}} \approx \boxed{0.486137.}$$

- **Uppgift 6 för LMA201, LMA521, Uppgift 7 för LMA200**

$$P(\xi = 1) = 3 \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{28}.$$

$$P(\xi = 3) = \frac{\binom{3}{1}^3}{\binom{9}{3}} = \frac{9}{28}.$$

$$P(\xi = 2) = 1 - P(\xi = 1) - P(\xi = 3) = \frac{18}{28}.$$

$$E(\xi) = 1 \times \frac{1}{28} + 2 \times \frac{18}{28} + 3 \times \frac{9}{28} = \boxed{2.28571.}$$

$$E(\xi^2) = 1 \times \frac{1}{28} + 4 \times \frac{18}{28} + 9 \times \frac{18}{28} = \frac{11}{2} = 5.5.$$

$$\sigma = \sqrt{5.5 - 2.28571^2} = \boxed{0.524909.}$$

- **Uppgift 7 för LMA521**

  Låt d_1 = antalet defekta i urval 1 och d_2 = antalet defekta i urval 2. Det gäller att

$$\begin{aligned} P(\text{partiet acc.}) &= P(d_1 = 0) + P(\{d_1 = 1\} \cap \{d_2 = 0\}) \\ &= P(d_1 = 0) + P(d_2 = 0 | d_1 = 1) P(d_1 = 1). \end{aligned}$$

  Det gäller att

$$P(d_1 = 0) = \frac{15}{18} \times \frac{14}{17} = \frac{35}{51},$$

$$P(d_1 = 1) = \frac{15}{18} \times \frac{3}{17} + \frac{3}{18} \times \frac{15}{17} = \frac{5}{17},$$

  samt

$$P(d_2 = 0 | d_1 = 1) = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}.$$

  Alltså fås att

$$P(\text{partiet acc.}) = \frac{35}{51} + \frac{7}{8} \times \frac{5}{17} = \frac{385}{408} \approx \boxed{0.943627.}$$

- **Uppgift 7 för LMA201, Uppgift 8 för LMA200**

  (a) Det finns två sekvenser som gör att Anna har bollen efter tre kast: Anna-Anders-Josefina-Anna och Anna-Josefina-Anders-Anna. Den sökta sannolikheten blir alltså

$$0.7 \times 0.3 \times 0.5 + 0.3 \times 0.5 \times 0.7 = \boxed{0.21.}$$

  (b) För att ta fram stationära fördelningen löses matrisekvationen $\pi P = \pi$ där P står för övergångsmatrisen, och $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$. Om man Anna står för tillstånd 1, Anders för tillstånd 2 och Josefina för tillstånd 3, så blir lösningen (se kursboken för detaljer angående hur man löser matrisekvationer) $\pi \approx (0.384615, 0.384615, 0.230769)$. Alltså är sannolikheten att Josefina håller bollen vid en tidpunkt långt in i framtiden ungefär $\boxed{0.230769.}$

- **Uppgift 8 för LMA521, LMA201**

  (a) $l_A = \boxed{-0.5}$, $l_{AC} = \boxed{1}$, $l_{ABC} = \boxed{-0.5}$

  (b) Man ser att generatorn $\boxed{D = AB}$. Alltså är $I = ABD$ så att alias till A blir $\boxed{BD}$.