Tillämpad matematisk statistik LMA521
Tentamen 2017-01-10

Tid: 8.30-12.30
Hjälpmedel: Kursboken **Matematisk Statistik** av Ulla Dahlbom. Formelsamlingen **Tabell- och formelsamling i matematisk statistik, försöksplanering och kvalitetsstyrning** av Håkan Blomqvist. Boken och formelsamlingen får ej innehålla extra anteckningar, men understrykningar, sticks och markeringar är tillåtna. **Chalmersgodkänd räknare.**
Examinator: Johan Tykesson
Telefonvakt: Johan Tykesson, 0703182096. Rond ca 9.30 och 11.30.
Betygsgränser: för betyg 3 krävs minst 20 poäng, för betyg 4 krävs minst 30 poäng, för betyg 5 krävs minst 40 poäng.

Till varje uppgift skall fullständig lösning lämnas!
OBS: text på fyra sidor!

1. (7 poäng) En EPI ingenjör vill släppa en pappershelikopter från cirka 10 meters höjd. Släpphöjden blir inte exakt 10 meter, utan kan istället betraktas som en kontinuerlig stokastisk variabel ξ med frekvensfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 6(x-9.5)(10.5-x) & \text{för } 9.5 \leq x \leq 10.5 \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

   (a) Beräkna väntevärde och standardavvikelse för ξ.

   (b) Beräkna den betingade sannolikheten

$$P(9.8 \leq \xi \leq 10.1 | 9.9 \leq \xi \leq 10.2).$$

   (c) Antag att man gör 60 oberoende släpp av helikoptern. Låt η vara antalet gånger som släpphöjden blir mindre än 10.1 meter. Beräkna approximativt $P(\eta \leq 43)$. Motivera approximationen.

2. (4 poäng) En chipsfabrik tillverkar påsar med dillchips. Vi antar att påsarnas vikter är normalfördelade med okänt väntevärde μ och okänd standardavvikelse σ. Man vill att standardavvikelsen inte skall vara för stor. Man har som regel att om standardavvikelsen är större än 5 gram så måste man stoppa maskineriet och undersöka om något är fel. Man gör 6 mätningar och får följande mätvärden (i enheten gram):

250.1	251.3	249.5	250.0	247.5	251.4

   Beräkna ett 95% en-sidigt konfidensintervall för σ baserat på de 6 mätningarna. Bör maskineriet undersökas? Basera svaret på konfidensintervallet du beräknade.

3. (5 poäng) En brevbärare lägger brev i en postsäck. Antag att ett slumpmässigt utvalt brev väger 25 gram med sannolikhet 0.1, 50 gram med sannolikhet 0.5, 75 gram med sannolikhet 0.3 och 100 gram med sannolikhet 0.1. Om man lägger i mer än 52.5 kilogram med brev i postsäcken går den sönder. Antag att brevbäraren lägger i 860 stycken slumpmässigt utvalda brev i säcken. Beräkna approximativt sannolikheten att säcken går sönder. Motivera approximationen.

4. (8 poäng) En telefonbutikskedja skall köpa in ett parti med 10000 smartphones. För att bestämma om man skall acceptera eller avvisa partiet använder man en dubbel provtagningsplan som fungerar på följande sätt: I urval 1 testas 25 telefoner. Om inga av dessa är defekta så accepteras partiet. Om fler än eller lika med 3 telefoner är defekta så avvisas partiet. I övriga fall går man till urval 2. I urval 2 testas 50 nya telefoner. Om det totala antalet defekta i urval 1 och 2 är mindre än eller lika med 2 accepteras partiet. Annars avvisas det. (Dvs, dubbel plan med parametrar $n_1 = 25$, $n_2 = 50$, $c_1 = 0$, $c_2 = 2$, $r_1 = r_2 = 3$). Låt ξ vara antalet telefoner som testas innan beslut om partiet skall accepteras eller avvisas fattas. Låt E vara händelsen att partiet avvisas. Låt D vara händelsen att antalet defekta enheter i urval 1 är 1. Antag att felkvoten i partiet är $p = 0.03$.

   (a) Beräkna $P(E)$.

   (b) Beräkna den betingade sannolikheten $P(D|E)$.

   (c) Beräkna $E(\xi)$ och $Var(\xi)$. Kom ihåg att $E(\xi)$ är samma sak som ASN(p).

5. (1+1+2+2 poäng) Antag att det finns två slags aktier: aktier i företag A och aktier i företag B. Låt ξ_1 vara värdet for en aktie i företag A vid en viss tidpunkt, och låt ξ_2 vara värdet for en aktie i företag B vid samma tidpunkt. Vi antar att ξ_1 och ξ_2 är oberoende stokastiska variabler, och att de båda är normalfördelade med väntevärde 100 kronor och standardavvikelse 10 kronor. Ivar har en aktieportfölj som består av 100 aktier i företag A. Ingrid har en aktieportfölj som består av 50 aktier i företag A och 50 aktier i företag B. Värdet av Ivars aktieportfölj kallar vi η_1 och det gäller alltså att $\eta_1 = 100\xi_1$. Värdet av Ingrids aktieportfölj kallar vi η_2 och det gäller alltså att $\eta_2 = 50\xi_1 + 50\xi_2$.

   (a) Beräkna $P(\xi_1 \leq 95)$.

   (b) Beräkna $P(\eta_1 \geq 12000)$.

   (c) Beräkna $P(\eta_2 \geq 12000)$.

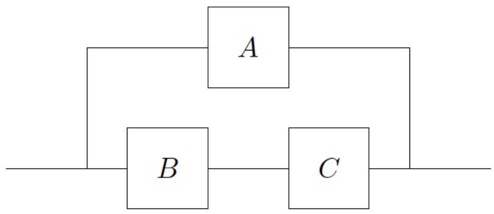
   (d) Beräkna sannolikheten att Ivars portfölj är värd mer än 1000 kronor mer än Ingrids portfölj.

6. (4+2 poäng) Antag att det för en viss slags laptop kan finnas 3 olika slags fel: (A) chassit är trasigt, (B) wifi anslutningen funkar inte, samt (C) touchpaden är trasig. Det gäller att A och C är oberoende av varandra. Dessutom gäller det att $P(A) = 0.01$, $P(B) = 0.01$, $P(C) = 0.02$, $P(A \cap B) = 0.003$ och $P(B \cap C) = 0.003$. Till sist gäller det också att de tre felen aldrig kan inträffa allihop samtidigt (kanske de mest defekta datorerna sorterats bort i ett tidigt skede i produktionen).

   (a) Antag att man väljer ut en laptop slumpmässigt. Låt ξ vara antalet olika slags fel som finns på denna laptop. Beräkna $P(A \cup B \cup C)$, $P(\xi = 0)$, $P(\xi = 1)$ och $P(\xi = 2)$.

   (b) Antag att man skall köpa in ett stort parti med laptops. Man säger att en laptop är defekt om åtminstone ett av felen A, B eller C inträffar. Om inget av felen inträffar är den OK. Man använder en enkel provtagningsplan: man tar ett urval på 50 laptops, och accepterar partiet om antalet defekta i urvalet är mindre än eller lika med 1. (Dvs, enkel plan med parametrar $n = 50$ och $c = 1$.) Beräkna sannolikheten att partiet avvisas. Observera att felkvoten i partiet ges av $P(A \cup B \cup C)$. Om du ej löst den uppgiften kan du få delpoäng om du antar ett rimligt värde på felkvoten. Urvalets storlek antas försumbart jämfört med partiets storlek.

7. (8 poäng) Betrakta systemet i figuren. För att det skall fungera måste det finnas en väg från vänster till höger genom fungerande komponenter. Livslängden för varje enskild komponent kan betraktas som en exponentialfördelad stokastisk variabel med väntevärde 1.5 år. De tre komponenterna antas dessutom vara oberoende av varandra.



   (a) Vad är sannolikheten att systemet fungerar efter 2 år?

   (b) Eftersom de enskilda komponenternas livslängder är kontinuerliga stokastiska variabler, blir även systemets livslängd en kontinuerlig stokastisk variabel. Låt η beteckna systemets livslängd. Ta fram frekvensfunktionen för η.

8. (2+4 poäng) En chipsfabrik undersöker hur olika faktorer påverkar smaken på pepparchips. Man betraktar följande faktorer: A (potatissort), B (mängden peppar), C (mängden salt), samt D (grov eller finräfflade chips). Man gjorde ett fullständigt faktorförsök med de olika faktorerna inställda på två olika nivåer (+ eller -). Man fick följande resultat vid de 16 försöken, där resultatet är ett slags smakindex.

Nr.	A	B	C	D	Resultat y
1	-	-	-	-	7.0
2	+	-	-	-	7.1
3	-	+	-	-	8.2
4	+	+	-	-	8.3
5	-	-	+	-	8.6
6	+	-	+	-	8.4
7	-	+	+	-	9.6
8	+	+	+	-	9.8
9	-	-	-	+	6.8
10	+	-	-	+	6.5
11	-	+	-	+	8.0
12	+	+	-	+	8.3
13	-	-	+	+	8.4
14	+	-	+	+	8.3
15	-	+	+	+	9.7
16	+	+	+	+	9.8

(a) Beräkna samspelseffekten l_{CD}.

(b) Antag att man även var intresserad av de fyra faktorerna E, F, G och H. Antag att man gör ett reducerat faktorförsök med totalt 16 försök där faktorerna A, B, C och D är inställda enligt ovan. Välj själv generatorer för det reducerade faktorförsöket. Beräkna alla ord, dvs alla "I", med ditt val av generatorer. Bestäm även upplösningen för det reducerade faktorförsöket. För full poäng krävs att upplösningen är åtminstone tre.

Lycka till!