LÖSNINGAR LMA521 20150317

1.

a) Låt ξ = utgifterna på en dag.

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^7 x \frac{6}{343}(7x - x^2)\,dx = \frac{6}{343}\int_0^7 (7x^2 - x^3)\,dx$$

$$= \frac{6}{343}\left[\frac{7x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^7 = \ldots = \boxed{3,5}$$

$$E(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{6}{343}\int_0^7 (7x^3 - x^4)\,dx = \frac{6}{343}\left[\frac{7x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^7$$

$$= \ldots = \frac{147}{10} = 14,7$$

$$\Rightarrow Var(\xi) = 14,7 - 3,5^2 = 2.45$$

$$\Rightarrow S(\xi) = \sqrt{2.45} \approx \boxed{1,565}$$

b) Låt ξ_i = utgifter dag i $(i = 1, \ldots, 7)$

$$Var(\xi_1 + \ldots + \xi_7) \underset{\text{oberoende}}{=} Var(\xi_1) + \ldots + Var(\xi_7) = 7 \cdot Var(\xi) = 7 \cdot 2,45 = \boxed{17,15}$$

c) Låt η = antalet dagar med utgifter > 400 kr.

Då är η $Bin(n=7, p)$ där $p = P(\xi > 4)$

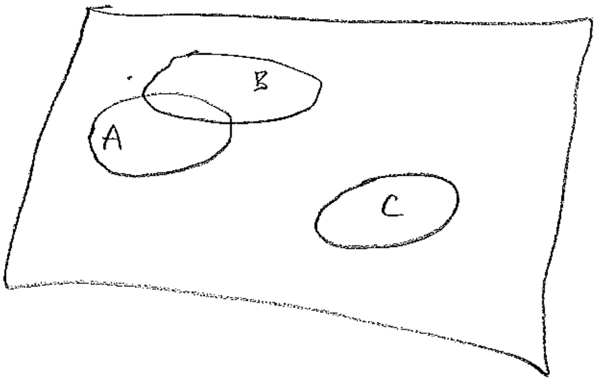
$$P(\xi > 4) = \int_4^7 \frac{6}{343}(7x - x^2)\,dx = \frac{6}{343}\left[\frac{7x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_4^7 = \ldots = \frac{135}{343} \approx 0,394$$

$$P(\eta \geq 5) = P(\eta = 5) + P(\eta = 6) + P(\eta = 7) \approx$$

$$\approx \binom{7}{5} 0,394^5 (1-0,394)^2 + \binom{7}{6} 0,394^6 (1-0,394)^1 + \binom{7}{7} 0,394^7 (1-0,394)^0$$

$$\approx \boxed{0,09057}$$

2.) Venn-diagram:



a)

$$P(\text{inget fel}) = P((A\cup B\cup C)^c) = 1 - P(A\cup B\cup C) = 0{,}84$$

$$\Longrightarrow P(A\cup B\cup C) = 0{,}16$$

Diagrammet ger $P(A\cup B\cup C) = P(A\cup B) + P(C) =$

$$= P(A) + P(B) - P(A\cap B) + P(C) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{oberoende}}}{=} P(A) + P(B) - P(A)P(B) + P(C)$$

$$= 0{,}04 + 0{,}1 - 0{,}04\cdot 0{,}1 + P(C) = 0{,}136 + P(C) = 0{,}16$$

$$\Longrightarrow P(C) = 0{,}16 - 0{,}136 = \boxed{0{,}024}$$

b) Låt ξ = antalet typ av fel.

$P(\xi=2) = P(A\cap B) = P(A)P(B) = 0{,}04\cdot 0{,}1 = 0{,}004$

$P(\xi=0) = 0{,}84$ enligt förutsättningarna

$P(\xi=1) = 1 - P(\xi=0) - P(\xi=2) = 1 - 0{,}84 - 0{,}004 = \boxed{0{,}156}$

$$E(\xi) = 0\cdot 0{,}84 + 1\cdot 0{,}156 + 2\cdot 0{,}004 = 0{,}164$$

$$E(\xi^2) = 0^2\cdot 0{,}84 + 1^2\cdot 0{,}156 + 2^2\cdot 0{,}004 = 0{,}172$$

$$\Longrightarrow Var(\xi) = E(\xi^2) - (E(\xi))^2 = 0{,}172 - 0{,}164^2 \approx \boxed{0{,}145}$$

3. Låt ξ_i = vinst på elev nr i $(i=1,\dots,90)$

$\mu = E(\xi_i) = 80\cdot 0{,}4 + 0\cdot 0{,}6 = 32$

$E(\xi_i^2) = 80^2\cdot 0{,}4 + 0^2\cdot 0{,}6 = 2560$

$\Rightarrow \sigma^2 = Var(\xi_i) = 2560 - 32^2 = 1536$

$\Rightarrow \sigma = \sqrt{1536}$

Totala vinsten på klassen $= T = \sum_{i=1}^{90} \xi_i$

Enligt CGS är T approx $N(90\cdot 32, \sqrt{90\cdot 1536}) =$

$= N(2880, \sqrt{90\cdot 1536})$

$$P(T \leq 2700) = P\left(\frac{T-2880}{\sqrt{90\cdot 1536}} \leq \frac{2700-2880}{\sqrt{90\cdot 1536}}\right) \approx \Phi(-0{,}48)$$

$$= 1 - \Phi(0{,}48) \approx 1 - 0{,}6844 = 0{,}3156$$

Svar: Sannolikheten är ca $\boxed{0{,}32}$

4.1 Mätvärden 1483,2 1499,5 1400,2 1525,8 1512,3

$\bar{x} = \frac{1}{5}(1483,2 + 1499,5 + 1400,2 + 1525,8 + 1512,3) = 1484,2$

$s = \sqrt{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2} = \ldots = 49,5259$

$\alpha = 0,05$. Ett 95 % konf int för σ ges av

$$\left[\sqrt{\frac{4 \cdot s^2}{11,143}}, \sqrt{\frac{4 \cdot s^2}{0,4844}}\right] = \ldots = [29,676;\ 142,32]$$

För σ^2 blir intervallet $[29,67^2, 142,32^2] =$

$= [880,49, 20\,254,50]$

5.)

Låt ξ = antalet defekta i urvalet.

ξ är $Hyp(N=10,\ n=3,\ p=\frac{3}{10})$.

Måste bestämma r så att $P(\xi \leq r-1) = \frac{49}{60}$

Vi har $P(\xi=0) = \dfrac{\binom{3}{0}\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{1 \cdot \frac{7!}{3!4!}}{\left(\frac{10!}{7!3!}\right)} = \dfrac{\left(\frac{5\cdot6\cdot7}{6}\right)}{\left(\frac{8\cdot9\cdot10}{6}\right)} = \ldots = \dfrac{7}{24}$

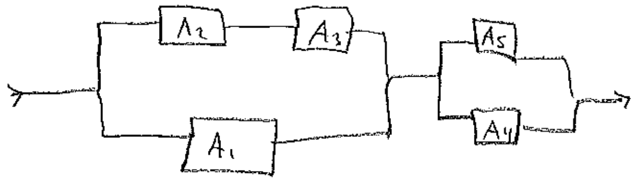
$$P(\xi=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}} = \ldots = \frac{21}{40}$$

Vi ser att $P(\xi \leq 1) = P(\xi=0) + P(\xi=1) = \frac{7}{24} + \frac{21}{40} = \frac{49}{60} \approx 0{,}81667$

Alltså är $r-1=1$, dvs $\boxed{r=2}$

6.

(OBS: annan notation än i tesen)



a)

Vet att $P(A_i) = 0{,}9$, $i = 1, \dots, 5$ och att de är oberoende.

Låt $G = A_1 \cup (A_2 \cap A_3)$ och $H = A_4 \cup A_5$

$$P(\text{systemet funkar}) = P(G \cap H) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{oberoende}}}{=} P(G)P(H)$$

$$P(G) = P(A_1 \cup (A_2 \cap A_3)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{additionsregeln}}}{=} P(A_1) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$\overset{\substack{\text{oberoende} \\ \downarrow}}{=} P(A_1) + P(A_2)P(A_3) - P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0{,}9 + 0{,}9^2 - 0{,}9^3 = 0{,}981$$

$$P(H) = P(A_4 \cup A_5) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{additionsregeln}}}{=} P(A_4) + P(A_5) - P(A_4 \cap A_5) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{oberoende}}}{=} P(A_4) + P(A_5) - P(A_4)P(A_5)$$

$$= 2 \cdot 0{,}9 - 0{,}9^2 = 0{,}99$$

Så $P(\text{syst funkar}) = 0{,}981 \cdot 0{,}99 = \boxed{0{,}97119}$

b) $$P(A_1^c \mid \text{systemet funkar}) = \frac{P(A_1^c \cap \{\text{syst funkar}\})}{P(\text{syst funkar})}$$

Observera att $A_1^c \cap \{\text{systemet funkar}\} = A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap H$. ty om strömmen ej kan passera A_1 så måste den passera A_2 och A_3.

$$P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap H) \underset{\text{oberoende}}{=} P(A_1^c)P(A_2)P(A_3)P(H) \underset{\text{enligt a)}}{=} 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}99 = 0{,}08019$$

$$\Rightarrow P(A_1^c \mid \text{syst funkar}) = \frac{0{,}08019}{0{,}97116} \approx \boxed{0{,}08257}$$

7.) Partiet accepteras i följande fall:

$$\left.\begin{array}{l} d_1 = 0 \\ d_1 = 1 \\ d_1 = 2 \end{array}\right\} \text{ accepteras efter urval 1}$$

$$\left.\begin{array}{l} d_1 = 3 \text{ och } d_2 = 0 \\ d_1 = 3 \text{ och } d_2 = 1 \\ d_1 = 4 \text{ och } d_2 = 0 \end{array}\right\} \text{ accepteras efter urval 2}$$

Eftersom n_1 och $n_2 > 10$ och $p = 0{,}05 < 0{,}1$ använder vi:

Poissonapprox: d_1 är approx $Po(80 \cdot 0{,}05) = Po(4)$

d_2 " " " $= Po(4)$

d_1 och d_2 antas ungefärligen oberoende eftersom partiet stort i förhållande till urvalen.

$$P(\text{accepteras efter urval 1}) \approx \frac{e^{-4}4^0}{0!} + \frac{e^{-4}4^1}{1!} + \frac{e^{-4}4^2}{2!} \approx \ldots \approx 0{,}23810$$

$$P(\text{accepteras efter urval 2}) \approx \frac{e^{-4}4^3}{3!}\frac{e^{-4}4^0}{0!} + \frac{e^{-4}4^3}{3!}\frac{e^{-4}4^1}{1!} + \frac{e^{-4}4^4}{4!}\frac{e^{-4}4^0}{0!}$$

$$\approx \ldots \approx 0{,}02147$$

$$\Rightarrow P(\text{partiet acc}) \approx 0{,}2381 + 0{,}02147 \approx 0{,}25957$$

$$\Rightarrow P(\text{partiet avvisas}) = 1 - 0{,}25957 = \boxed{0{,}74043}$$

Svar: Ca $\boxed{0{,}74}$

b) $P(A) = P(d_1 = 3) + P(d_1 = 4) \approx \frac{e^{-4}4^3}{3!} + \frac{e^{-4}4^4}{4!} \approx 0{,}3907$

$$P(\text{partiet acc} \mid A) = \frac{P(\text{partiet acc} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\text{accepteras efter urval 2})}{P(A)}$$

$$\underset{\text{enligt a)}}{=} \frac{0{,}02147}{0{,}3907} \approx \boxed{0{,}0550}$$

8.

a)

A	B	C	Resultat
−	−	−	20,5
+	−	−	22,8
−	+	−	20,3
+	+	−	24,5
−	−	+	18,2
+	−	+	21,8
−	+	+	19,2
+	+	+	25,1

$$l_A = \frac{(22.8 + 24.5 + 21.8 + 25.1)}{4} - \frac{(20.5 + 20.3 + 18.2 + 19.2)}{4}$$

$$= \ldots = 23.55 - 19.55 = \boxed{4}$$

$$l_{AB} = \frac{(20.5 + 24.5 + 18.2 + 25.1)}{4} - \frac{(22.8 + 20.3 + 21.8 + 19.2)}{4}$$

$$= \boxed{1,05}$$

b) $\sigma = 2$. Ett 95% referensintervall ges av $0 \pm 1,96 \cdot \frac{2\sigma}{\sqrt{N}}$

$$= 0 \pm \frac{1,96 \cdot 4}{\sqrt{8}} = 0 \pm 1,96 \cdot \sqrt{2} = 0 \pm 2,77.$$

"Faktorn" A är signifikant på 5% nivå ty den ligger utanför intervallet.

c) D = AB E = BC F = AC G = ABC.

$I_1 = ABD$

$I_2 = BCE$

$I_3 = ACF$

$I_4 = ABCG$

$I_5 = I_1 I_2 = ABDBCE = ACDE$

$I_6 = I_1 I_3 = ABDACF = BCDF$

$I_7 = I_1 I_4 = ABDABCG = CDG$

$I_8 = I_2 I_3 = BCEACF = ABEF$

$I_9 = I_2 I_4 = BCEABCG = AEG$

$I_{10} = I_3 I_4 = ACFABCG = BFG$

$I_{11} = I_1 I_2 I_3 = A\cancel{B}D\cancel{B}\cancel{C}E\cancel{A}\cancel{C}F = DEF$

$I_{12} = I_1 I_3 I_4 = \cancel{A}\cancel{B}D\cancel{A}\cancel{C}FAB\cancel{C}G = ADFG$

$I_{13} = I_2 I_3 I_4 = \cancel{B}CE\cancel{A}\cancel{C}F\cancel{A}\cancel{B}CG = CGE$

$I_{14} = I_1 I_2 I_4 = ABDB\cancel{C}EAB\cancel{C}G = BDEG$

$I_{15} = I_1 I_2 I_3 I_4 = \cancel{A}\cancel{B}D\cancel{B}\cancel{C}E\cancel{A}\cancel{C}FABCG$
$= ABCDEFG$

Kortaste ordet har längd 3

$\Rightarrow$ Upplösning $\boxed{3}$