Matematisk statistik LMA521
Lösningar Tentamen 2017-06-07

---

1. Vid en byggnation (byggverksamhet)är byggtiden uppdelad i två moment, anläggning av grund och uppsättning av väggar och tak.
   Tiden ξ för anläggning av grund gäller att $\xi \in N(4.5, 0.6)$ och tiden ζ för uppsättning av väggar och tak gäller att $\zeta \in N(5.0, 0.8)$, enhet månader.
   ξ och ζ anses vara oberoende.

   (a) Sannolikheten för att $\xi \geq 4.7$ *och* $\zeta \geq 5.3$ är produkten

   $$P(\xi \geq 4.7) \cdot P(\zeta \geq 5.3) = (1 - \Phi\left(\frac{4.7 - 4.5}{0.6}\right))(1 - \Phi\left(\frac{5.3 - 5.0}{0.8}\right)) \approx 0.36944 \cdot 0.3538 \approx 0.1307.$$

   (b) Sannolikheten för att den sammanlagda tiden för de två momenten tar mer tid än 10 månader är

   $$P(\xi + \zeta \geq 10) = 1 - \Phi\left(\frac{10.0 - 9.5}{1.0}\right) \approx 0.31\,.$$

2. Händelserna A och B är oberoende samt $P(A \cup B) = 0.8$ och $P(A^c) = 0.4$, så att $P(A) = 0.6$. Sannolikheten för händelsen B ges av

   $$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad = \quad P(A \cup B) \Longleftrightarrow P(B) - P(A \cap B) = P(B)(1 - P(A)) = P(A \cup B) -$$

   $$\Longleftrightarrow \quad P(B) = \frac{P(A \cup B) - P(A)}{1 - P(A)} = 0.5\,.$$

3. Betrakta funktionen... $f(x) = \begin{cases} A(x - x^2), & \text{om } 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = 0, & \text{för övriga } x. \end{cases}$

   (a) Konstanten A, så att funktionen blir en frekvensfunktion:

   $$\int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Longrightarrow A = 6\,.$$

   (b) Väntevärde:

   $$\mu := \int_0^1 6x(x - x^2)dx = 6\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] = ... = \frac{1}{2}\,.$$

   (c) Motsvarande varians:

   $$V := \int_0^1 6x^2(x - x^2)dx - \mu^2 = \frac{3}{2} - \frac{6}{5} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}\,.$$

4. Gipsplattor skall täcka en 100 meter lång vägg. Deras bredder har väntevärde 1.00 m och standardavvikelse 0.005 meter och kan betraktas som oberoende.

Sannolikheten att 100 plattors sammanlagda bredd understiger 99.9 meter med Centrala gränsvärdessatsen: Låt ξ_k vara bredden på gipsplatta nummer k. Sätt $\sum_{k=1}^{100} \xi_k = \zeta$. Då gäller

$$\mu(\zeta) = 100.0, \quad \sigma(\zeta) = 0.005 \cdot \sqrt{100} = 0.05\,.$$

Med CGS är sökt sannolikhet approximativt

$$\Phi\left(\frac{99.9 - 100.0}{0.1}\right) = \Phi(-1.0) = 1 - \Phi(1.0) \approx 0.16\,.$$

5. Vid en lastbilsfirma finns nio lastbilar, numrerade 1,2...9.
De skall samtliga användas för att lasta vägsalt i staden X:s hamn.
Två lastbilar skall till stad A, tre skall till stad B, och fyra skall till stad C.

   (a) På hur många sätt kan lastbilarna dirigeras till städerna A, B och C? Antalet sätt är

   $$\binom{9}{2} \cdot \binom{7}{3} = 1260 = \{\text{eller}\} = \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{3} = 1260$$

   (b)

   $$m = \binom{9}{4} \text{ och } g = \binom{2}{2} \cdot \binom{7}{2} \Longrightarrow P = \frac{21}{126} = \frac{1}{6}\,.$$

6. I ett visst varulager har man funnit följande sannolikheter
för förekomsten av larm och inbrott gällande per natt:
Sannolikheten för larm är $0.01 = P(L)$.
Sannolikheten att om det är larm. så är det inbrott är $0.9 = P(I|L)$.
Sannolikheten att det är inbrott om det inte är larm är $0.005 = P(I|L^c)$.
Sannolikheten för inbrott är

$$P(I) = P(I|L){\cdot}P(L){+}P(I|L^c)P(L^c) \text{ och } P(I{\cap}L) = P(I|L){\cdot}P(L) = 0.01395.$$

Så att sökt sannolikhet är

$$P(L|I) = \frac{P(I \cap L)}{P(I)} = \frac{P(I|L) \cdot P(L)}{P(I)} = \frac{0.009}{0.01395} \approx 0.65 \text{ (Svar)}$$

7. Mätvärdena ger att $\bar{x} = 251.133$ och $s = 2.30072$. Antalet frihetsgrader $n - 1 = 2$, $\alpha = 0.05$ så $t_{0.025}(2) = 4.3$ (enligt rad 2, kolumn 0.05 i t-tabellen). Konfidensintervallet blir

$$\bar{x} \pm \frac{t_{0.025}(2)s}{\sqrt{3}} = \boxed{251.133 \pm 5.71173.}$$

8. (a) Låt X vara en slumpvariabel som representerar antalet studenter som svarar fel i första urvalet. Då är $X \sim Bin(N = 10, p = 0.15)$. Sannolikheten att acceptera "partiet" i första urvalet är då

   $$\mathbb{P}(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0.15^0 \cdot 0.85^{10} = 19.69\%.$$

Låt Y var en slumpvariabel som representerar antalet studenter som svarar fel i andra urvalet. Då är $Y \sim Bin(N = 20, p = 0.15)$. Sannolikheten att acceptera "partiet" i andra urvalet är då

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X + Y \leq 2 \cap 1 \leq X \leq 2) = \mathbb{P}(Y \leq 1 | X = 1)\mathbb{P}(X = 1) \\
&\quad + \mathbb{P}(Y \leq 0 | X = 2)\mathbb{P}(X = 2) \\
&\quad = \mathbb{P}(Y \leq 1)\binom{10}{1} \cdot 0.15^1 \cdot 0.85^9 + \mathbb{P}(Y \leq 0)\binom{10}{2} \cdot 0.15^2 \cdot 0.85^8 \\
&\quad = \mathbb{P}(Y \leq 1) \cdot 0.3474 + \mathbb{P}(Y \leq 0) \cdot 0.2759.
\end{aligned}$$

Nu återstår bara att räkna ut sannolikheterna för Y.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq 0) &= \binom{20}{0} \cdot 0.15^0 \cdot 0.85^{20} = 0.0388 \\
\mathbb{P}(Y \leq 1) &= 0.0388 + \binom{20}{1} \cdot 0.15^1 \cdot 0.85^{19} \\
&= 0.0388 + 0.1368 = 0.1756
\end{aligned}$$

Sannolikheten att acceptera "partiet" i andra urvalet är alltså

$$0.1756 \cdot 0.3474 + 0.0388 \cdot 0.2759 = 0.0717 = 7.17\%.$$

Sannolikheten att acceptera "partiet" är totalt 26.86%. Sannolikheten att du avvisar "partiet" och alltså anser att dagens ungdom är förtappad är alltså 73.14%.

(b) Det genomsnittsliga provuttaget ar väntevärdet av antal provuttag innan beslut. Alltså $ASN(0.15) = 10 + 20 \cdot \mathbb{P}(1 \leq X \leq 2)$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(1 \leq X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = 0.3474 + 0.2759 = 0.6233 \\
&\Rightarrow ASN(0.15) = 10 + 20 \cdot 0.6233 = 22.466
\end{aligned}$$

9. (a) $l_B = 9.75$, $l_{BC} = -1.25$, $l_{ABC} = -1.25$

   (b) Man ser att generatorn $D = AB$. Alltså är $I = ABD$ så att alias till A blir BD.

10. Eftersom antalet studenter som tas ut slumpmässigt varje år är 5 så får vi leta upp motsvarande konstanter i tabellen på raden motsvarande $n = 5$. Konstanterna vi behöver är $A_2 = 0.577, D_4 = 2.115, D_3 = 0$.

    Styrgränserna för medelvärdesdiagrammet blir:

$$\begin{aligned}
S_{\text{ö}} &= \bar{\bar{x}} + A_2\bar{R} = 130 + 0.577 \cdot 40 = 153.08 \\
S_{\text{u}} &= \bar{\bar{x}} - A_2\bar{R} = 130 - 0.577 \cdot 40 = 106.92.
\end{aligned}$$

    Styrgränserna för R-diagrammet blir

$$\begin{aligned}
S_{\text{ö}} &= \bar{R} \cdot D_4 = 40 \cdot 2.115 = 84.6 \\
S_{\text{u}} &= \bar{R} \cdot D_3 = 0.
\end{aligned}$$

År 2015 så sprang de utvalda chalmeristerna i genomsnitt snabbare än styrgränsen för medelvärdesdiagrammet tillåter. Processen är alltå inte under statistisk kontroll.

Antag att $X \sim \mathbb{N}(\mu = 130, \sigma = 20)$. Sannolikheten att larma vid ett utvalt år ä r $\mathbb{P}(A_M)$, där A_M är händelsen att $\bar{x}$ är utanför styrgränserna..

Förväntat antal år som man måste mäta innan larm sker (ARL) ä r $\frac{1}{\mathbb{P}(A_M)}$.

$\bar{X} \sim \mathbb{N}(\mu = 130, \sigma = \frac{20}{\sqrt{5}})$ eftersom det ä r stickprovsmedelvärdet av 5 olika löpare och variansen då delas med antal lö pare.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_M) &= \mathbb{P}(\bar{X} > 153.08 \cup \bar{X} < 106.92) = 1 - F_z\left(\frac{153.08 - 130}{20/\sqrt{5}}\right) + F_z\left(\frac{106.92 - 130}{20/\sqrt{5}}\right) \\ &= 1 - F_z(2.58) + F_z(-2.58) = 2 - 2F_z(2.58) \\ &= 2 - 1.990 = 1\%\end{aligned}$$

Alltså är $ARL = \frac{1}{0.01} = 100$.

Händelsen att man larmar inom 6 år, A_6, kan beskrivas som komplementet till sannolikheten att man inte larmar inom 6 år. Alltså

$$\mathbb{P}(A_6) = 1 - \mathbb{P}(A_6^C) == 1 - \mathbb{P}(A_M^C)^6 = 1 - (1 - 0.01)^6 = 1 - 0.99^5 = 5.85\%$$

Där $\mathbb{P}(A_M^C)^6$ kom från att löptiderna för de olika åren anses oberoende.