LMA521: Statistisk kvalitetsstyrning

Föreläsning 1

Anders Hildeman

Dagens innehåll

1. Kvalitet
2. Acceptanskontroll enligt attributmetoden
3. Enkel provtagningsplan
4. Design av enkel provtagningsplan med binomialnomogram
5. Genomgång av problem 1.5 från boken.

En tillverkad produkt (eller utförd tjänst) måste leva upp till vissa krav för att vara användbar.

Vad dessa krav är bestäms av yttre faktorer såsom marknad och lagstiftning men också av inre faktorer såsom ideal, produktionsprocess, etc.

Kvalitet = uppfyllande av krav/förväntningar

Kvalitet

Exempel:

Vilka skor har bäst kvalitet?

1. Sko 1: Håller 3 år med 70% sannolikhet men 1 år med 30% sannolikhet.
2. Sko 2: Håller 2 år med 100% sannolikhet.

Kvalitet

Exempel:

Vilka skor har bäst kvalitet?

1. Sko 1: Håller 3 år med 70% sannolikhet men 1 år med 30% sannolikhet.
2. Sko 2: Håller 2 år med 100% sannolikhet.

Oftast efterfrågar marknaden förutsägbarhet. Sko 2 skulle därför vara att föredra även om den förväntade livslängden är längre för sko 1. Bra kvalitet är oftast relaterat till liten spridning.

Vad kan dålig kvalitet bero på?

Kvalitet

Vad kan dålig kvalitet bero på?

- Dålig kvalitet hos inköpta komponenter.
- Problem med tillverkningsprocessen.
- Kraven är orealistiska.

Kursen berör inte hur kvaliteten kan förbättras. Istället kommer vi gå igenom hur man upptäcker bristande kvalitet.

Kvalitet

Hur upptäcker man bristande kvalitet?

Kvalitet

Hur upptäcker man bristande kvalitet?

Varför inte kontrollera alla producerade enheter (allkontroll)?

Kvalitet

Hur upptäcker man bristande kvalitet?

Varför inte kontrollera alla producerade enheter (allkontroll)?

I många fall inte möjligt. Inspektionen kan vara för dyr eller kräva att enheten förstörs.

Istället får man kontrollera ett mindre antal och dra en slutsats om alla producerade enheter (acceptanskontroll). $\Rightarrow$ Statistik

Acceptanskontroll

Under acceptanskontroll så kontrollerar man n enheter slumpvist utvalda från N möjliga. Av dessa N så är D:st defekta.

Målet är att om vi vet att D är tillräckligt liten så kan vi acceptera kvaliteten annars får vi skicka tillbaka partiet och producera nya som förhoppningsvis har mindre antal defekta.

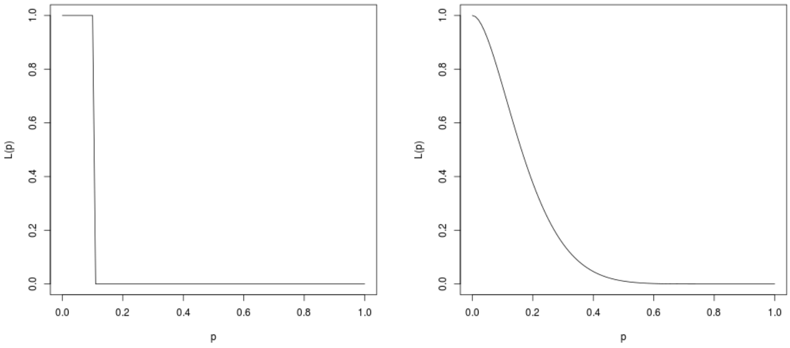
Acceptanskontroll

Problemet är att givet samma parti av enheter så kan man dra olika antal defekta enheter pga slumpen. Alltså kan beslutet att acceptera eller refusera partiet bli olika.

Acceptanssannolikheten, $L(p)$, beror på den totala sannolikheten att en enhet är defekt, $p = \frac{D}{N}$, samt stickprovsstorleken, n.

Grafen av $L(p)$ och p kallas för OC-kurvan (Operating Characteristic Curve).

$L(p)$ är avtagande och idealt vill man att den skall se ut som i figur 1a. Tyvärr kommer den få ett flackare utseende, figure 1b, beroende på att inte hela partiet är kontrollerat.



(a) Allkontroll.

(b) Acceptanskontroll med $n < N$.

Målet med att designa en acceptanskontroll är att justera OC-kurvan så att den passar behoven så bra som möjligt.

Typiskt så vill man hålla n liten men samtidigt se till så att OC-kurvan blir så optimal som möjligt. D.v.s hög sannolikhet att acceptera för små p-värden och låg sannolikhet att acceptera för höga p-värden.

Acceptanskontroll

Den uppmätta kvalitetsvariabeln kan vara antingen kvalitativ eller kvantitativ.

Definition: Kvalitativ kvalitetsvariabel

Från kontrollen av en enhet kategoriseras den till en grupp. Detta resulterar i kategoriseringen felfri eller defekt.

Definition: Kvantitativ kvalitetsvariabel

Från kontrollen av en enhet tilldelas den ett tal. Från detta tal kan man se hur långt bort från kravgränserna enheten befinner sig.

Acceptanskontroll enligt attributmetoden

Om kvalitetsvariabeln är kvalitativ så används acceptanskontroll enligt attributmetoden.

1. Dra ett urval från ett parti av enheter.
2. Klassificera enheterna från urvalet som defekta eller felfria.
3. Avgör om hela partiet skall accepteras eller avvisas baserat på antalet defekta och felfria i urvalet.

Enkel provtagningsplan

Definition: Enkel provtagningsplan

Välj ut n stycken enheter från de N existerande i partiet. Om $d < r$, acceptera partiet.

- N: Partiets storlek
  Antalet enheter som existerar i partiet.
- n: provgruppsstorleken
  Antalet enheter som kontrolleras.
- d: Antalet defekta enheter i provgruppen.
- r: avvisningstalet
  En på förhand bestämd gräns för hur många enheter som minst måste vara defekta för att man skall avvisa partiet.
- c: acceptanstalet
  Hur många enheter som mest kan tillåtas vara defekta i provgruppen utan att avvisa partiet. $c = r - 1$.

Enkel provtagningsplan

Antal defekta enheter som upptäcks motsvarar ju det klassiska problemet med att man har en urna med N:st bollar av två färger, D är blå och resten är gröna. Man plockar sedan upp n:st ur urnan (utan återläggning).
Vad är sannolikhetsfördelningen för antal blå bollar som man plockat upp?

Enkel provtagningsplan

Vi vet sedan de första veckorna i kursen att detta kan modelleras med en slumpvariabel, ξ, som är hypergeometriskt fördelad, $\xi \sim Hyp(N, n, p)$, där $p = \frac{D}{N}$.

Sannolikheten att acceptera partiet, $L(p) = \mathbb{P}(\xi < r)$.

$$\mathbb{P}(\xi < r) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\binom{Np}{i}\binom{N-Np}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$

Som vi minns så är den hypergeometriska fördelningen lite jobbig att räkna på. Om vi skall räkna för hand kan vi istället använda oss av några approximationer från tidigare i kursen.

Approximationer: Hypergeometrisk fördelning

- Binomialfördelning: Ifall $\frac{n}{N} < 0.1$

$$\xi \sim Bin(n, p)$$

- Poissonfördelning: Ifall $\frac{n}{N} + p < 0.1$ och $n > 10$

$$\xi \sim Po(\lambda = Np)$$

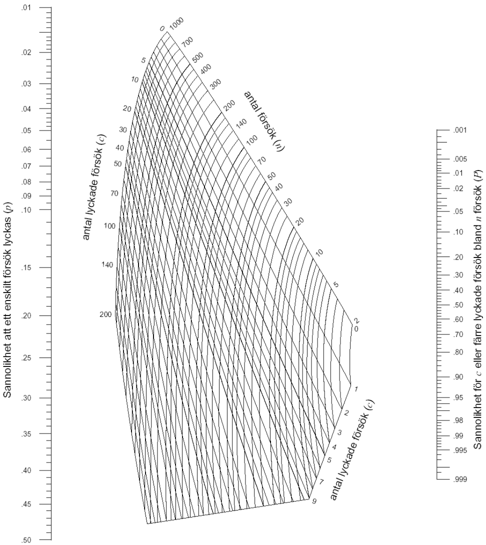
- Normalfördelning: Ifall $\frac{n}{N} < 0.1$ och $np(1-p) > 10$.

$$\xi \sim N\left(\mu = np, \sigma^2 = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)\right)$$

- Vanligtvis i den här kursen kommer vi approximera den Hypergeometriska fördelningen med en binomialfördelning.
- Även denna är lite småjobbig att räkna på men vi kan ta fram acceptanssannolikheter med hjälp av tabeller för binomialfördelningen eller ett binomialfördelningsnomogram.

NOMOGRAM OVER BINOMIALFORDELNINGEN

$P = P(X \leq c)$ där $X \in Bin(n, p)$; X = antal lyckade försök



Exempel: Räkna ut acceptanssannolikheten

Ett parti om 1000 enheter innehåller 240 defekta. Vad är acceptanssannolikheten om provgruppsstorleken är 10 och avvisningstalet är 2?

Exempel: Räkna ut acceptanssannolikheten

Ett parti om 1000 enheter innehåller 240 defekta. Vad är acceptanssannolikheten om provgruppsstorleken är 10 och avvisningstalet är 2?

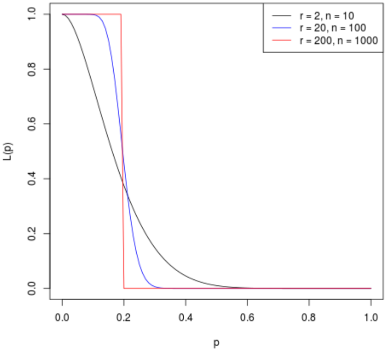
Lösning: Räkna ut acceptanssannolikheten

$N = 1000, n = 10, r = 2, p = \frac{240}{1000} = 0.24$
Binomial approximationen kan användas ty $\frac{n}{N} = 0.01 < 0.1$.

$$\xi \sim Bin(N = 10, p = 0.24)$$

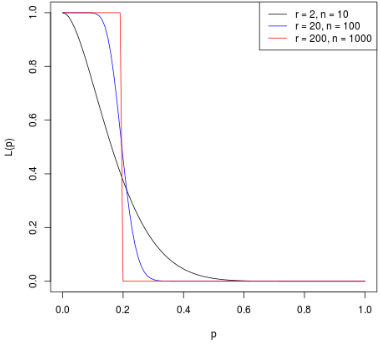
$$L(p = 0.24) = \mathbb{P}(\xi < r) = \sum_{i=0}^{1} \binom{10}{i} (0.24)^i (0.76)^{10-i}$$
$$= 0.76^{10} + 10 \cdot 0.24 \cdot 0.76^9 \approx 26,7\%$$

Antag att partiet borde ha avvisats om 20% eller mer av enheterna var defekta.
Vi räknade ut att med föreslagen enkel provtagningsplan så skulle det vara 26.7% risk att vi accepterade partiet även om antalet defekta enheter var 24%.

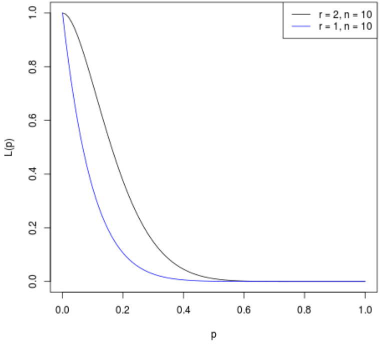


Figur: OC-kurvan för föregående exempel med olika stora provgrupper.

För att minska risken att acceptera när så inte borde så kan man förutom att öka n även minska r. Detta leder dock till att man kommer avvisa fler gånger när man inte borde.



(a) OC-kurvan för föregående exempel fast olika stora provgrupper.



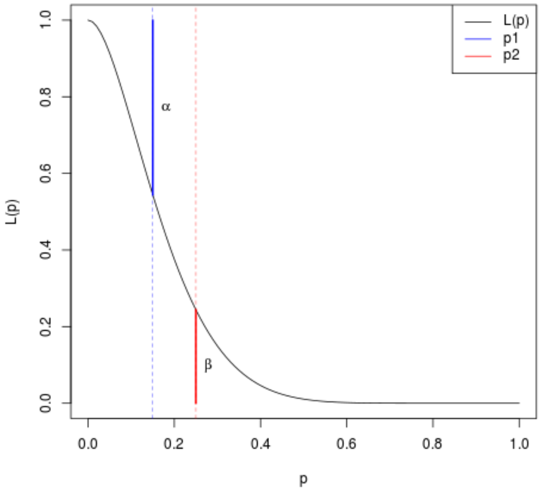
(b) OC-kurvan för föregående exempel fast olika stora avvisningstal.

Definition: Typer av fel

- Typ I fel: Avvisar ett bra parti. (Dyrt för producenten)
- Typ II fel: Accepterar ett dåligt parti. (Dåligt för konsumenten)

Definition: Kvalitetsgränser

- p_1 = Acceptabel kvalitetsnivå, AQL: Största felkvoten som kan anses vara tillfredsställande som processgenomsnitt
- p_2 = gränskvalitet, LTPD: Det sämsta värdet på kvalitetsnivån som konsumenten är villig att acceptera
- α = producentrisk: Risken att göra ett typ I fel vid p_1.
- β = konsumentrisk: Risken att göra ett typ II fel vid p_2.



Figur: OC-kurvan med producentrisk och konsumentrisk.

Vi bestämmer p_1 och p_2 samt de risker vi är beredda att ta vid dessa gränser (producentrisken och konsumentrisken). Alltså, $L(p_1) = 1 - \alpha, L(p_2) = \beta$

Den enkla provtagningsplanen har två parametrar (n, r).

Två ekvationer och två okända parametrar! Nu behöver man bara lösa ut bästa n och c värden från dessa krav. Ofta kan ett binomialfördelningsnomogram hjälpa oss här.

Problem: 1.5 a) (SK)

Ett företag har bestämt att ett bra parti innehåller högst 4% defekta enheter. Ett sådant parti skall accepteras med sannolikheten 95%. Ett dåligt parti innehåller minst 15% defekta enheter. Acceptanssannolikheten för ett sådant parti får bara vara 10%.

a) Vilken enkel provtagningsplan bör detta företag använda så att dessa villkor blir uppfyllda?

Problem: 1.5 a) (SK)

Ett företag har bestämt att ett bra parti innehåller högst 4% defekta enheter. Ett sådant parti skall accepteras med sannolikheten 95%. Ett dåligt parti innehåller minst 15% defekta enheter. Acceptanssannolikheten för ett sådant parti får bara vara 10%.

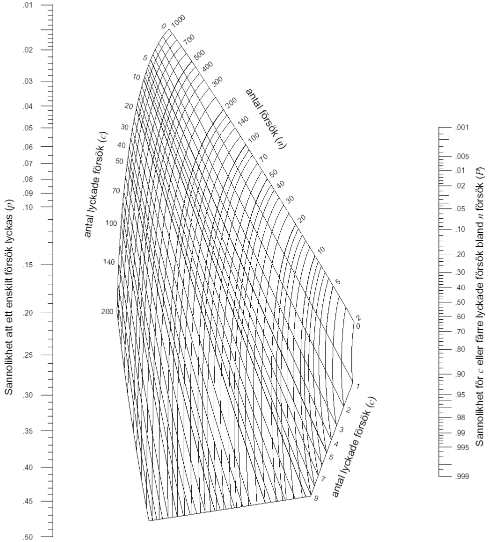
a) Vilken enkel provtagningsplan bör detta företag använda så att dessa villkor blir uppfyllda?

Lösning: 1.5 a) (SK)

$p_1 = 4\%,\ L(p_1) = 95\% = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 5\%$
$p_2 = 15\%,\ L(p_2) = 10\% = \beta$
Antag $N >> n$ eftersom det inte står något om storleken på N.
Därför kan vi approximera med en binomialfördelning för utfallet av antal defekta i provgruppen, $\xi \sim Bin(n, p)$.

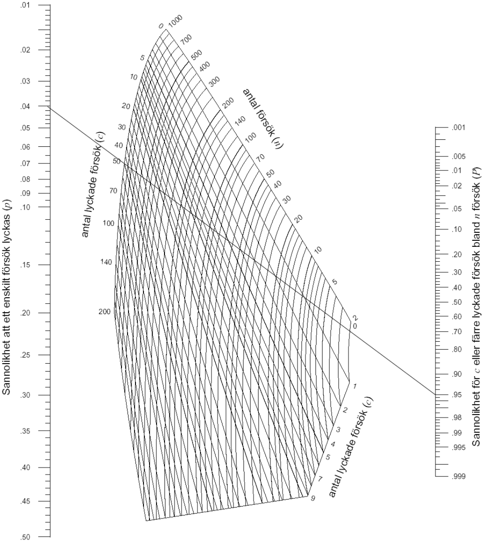
NOMOGRAM OVER BINOMIALFÖRDELNINGEN

$P = P(X \leq c)$ där $X \in Bin(n,p)$; X = antal lyckade försök



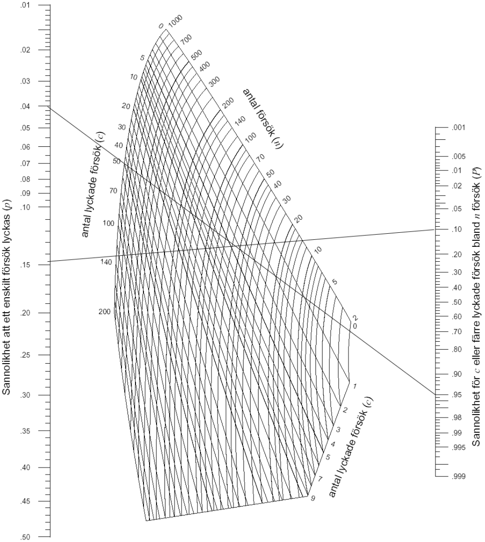
NOMOGRAM ÖVER BINOMIALFÖRDELNINGEN

$P = P(X \leq c)$ där $X \in Bin(n, p)$; $X =$ antal lyckade försök



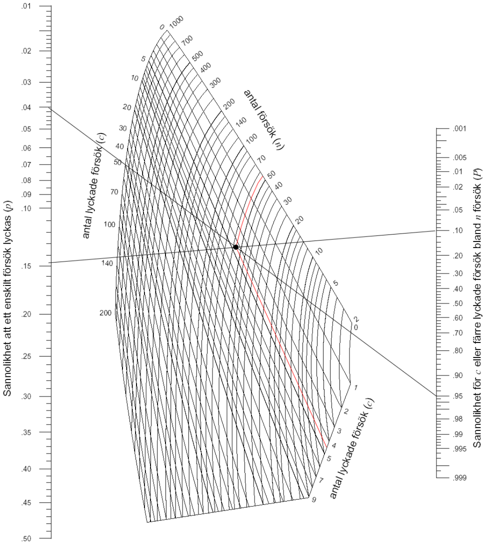
NOMOGRAM ÖVER BINOMIALFÖRDELNINGEN

$P = P(X \leq c)$ där $X \in Bin(n,p)$; X = antal lyckade försök



NOMOGRAM ÖVER BINOMIALFÖRDELNINGEN

$P = P(X \leq c)$ där $X \in Bin(n,p)$; X = antal lyckade försök



Lösning: 1.5 a) (SK)

Från binomialmonogrammet såg vi: $n \approx 60, c \approx 5$

Problem: 1.5 b) (SK)

Kontrollera att allting stämmer genom att räkna ut $L(p_1)$ och $L(p_2)$.

Lösning: 1.5 a) (SK)

Från binomialmonogrammet såg vi: $n \approx 60, c \approx 5$

Problem: 1.5 b) (SK)

Kontrollera att allting stämmer genom att räkna ut $L(p_1)$ och $L(p_2)$.

Lösning: 1.5 b) (SK)

$$L(4\%) = \sum_{i=0}^{5} \binom{60}{i} (0.04)^i (0.96)^{60-i} = 96.8\%$$

$$L(15\%) = 9.68\%$$

Sammanfattning

- Kvalitet
  Uppfyllandet av krav
- Acceptanskontroll
  Gör ett urval som är mindre än alla enheter i partiet. Dra slutsats om partiets kvalitet från detta urval.
- Enkel provtagningsplan
  En plan för hur man skall dra slutsatsen om partiets kvalitet givet en mindre urvalsgrupp.
- Design av enkel provtagningsplan med binomialnomogram
  Dra linjer i ett binomialmonogram för att avgöra optimala n- och r-värden i den enkla provtagningsplanen. Fungerar bara om $n < \frac{N}{10}$ eftersom den är baserad på binomialapproximationen.