LMA521: Statistisk kvalitetsstyrning

Föreläsning 2

Anders Hildeman

Föregående föreläsning

- Kvalitet
  Uppfyllandet av krav
- Acceptanskontroll
  Gör ett urval som är mindre än alla enheter i partiet. Dra slutsats om partiets kvalitet från detta urval.
- Enkel provtagningsplan
  En plan för hur man skall dra slutsatsen om partiets kvalitet givet en mindre urvalsgrupp.
- Design av enkel provtagningsplan med binomialnomogram
  Dra linjer i ett binomialmonogram för att avgöra optimala n- och r-värden i den enkla provtagningsplanen. Fungerar bara om $n < \frac{N}{10}$ eftersom den är baserad på binomialapproximationen.

Dagens innehåll

1. Dubbel provtagningsplan.
2. Genomgång av problem 1.8 från boken.
3. Design av dubbel provtagningsplan med hjälp av tabell.
4. Genomgång av problem 1.12 a) från boken.

Dubbel provtagningsplan

I en dubbel provtagningsplan behöver inte längre $c = r - 1$. Precis som tidigare accepterar man partiet om antalet defekta, d uppfyller $d \leq c$. Partiet avvisas precis som tidigare om $d \geq r$.

Nu introducerar vi en tredje möjlighet. Om $c < d < r$ så väljer man att kontrollera några fler enheter innan man drar en slutsats.

Fördelen med detta är att man kan ha ett genomsnittligt antal kontrollerade enheter som är mindre än för en enkel provtagningsplan samtidigt som producent- och konsument-riskerna är på samma nivå.

Definition: Dubbel provtagningsplan

- Urval 1
  Kontrollera n_1 enheter. Om $d \leq c_1$ acceptera partiet. Om $d \geq r_1$ avvisa partiet. Om $c_1 < d < r_1$ gå till urval 2.
- Urval 2
  Kontrollera ytterligare n_2 enheter. Om $d \leq c_2$, acceptera partiet. Om $d \geq r_2$, avvisa partiet. $(c_2 = r_2 - 1)$

Vi kan modellera acceptanssannolikheten genom slumpvariablerna antalet defekta i första urvalet, ξ_1, och antalet defekta i andra urvalet, ξ_2.

$$\mathbb{P}(\text{acceptera}) = \mathbb{P}(\text{acceptera i första urvalet} \cup \text{acceptera i andra urvalet})$$

$$= \mathbb{P}((\xi_1 \leq c_1) \cup ((\xi_1 + \xi_2 \leq c_2) \cap (c_1 < \xi_1 < r_1)))$$

$$= \mathbb{P}(\xi_1 \leq c_1) + \sum_{k=c_1+1}^{r_1-1} \mathbb{P}(\xi_2 \leq c_2 - k | \xi_1 = k)\mathbb{P}(\xi_1 = k)$$

Problem: 1.8 (SK)

$$n_1 = 20, n_2 = 40, c_1 = 1, c_2 = 2, r_1 = r_2 = 3$$

Vad är $L(5\%)$?

Problem: 1.8 (SK)

$$n_1 = 20, n_2 = 40, c_1 = 1, c_2 = 2, r_1 = r_2 = 3$$

Vad är $L(5\%)$?

Lösning: 1.8 (SK)

Antag $N >> n_1 + n_2$ så vi kan approximera med binomialfördelningen. Sannolikhet att acceptera i urval 1:

$$\mathbb{P}(\xi_1 \leq 1) = 0.95^{20} + 20 \cdot 0.05 \cdot 0.95^{19} \\ \approx 73.58\%$$

Sannolikhet att acceptera i urval 2:

$$\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 \leq 2 | \xi_1 = 2)\mathbb{P}(\xi_1 = 2) = \mathbb{P}(\xi_2 = 0)\mathbb{P}(\xi_1 = 2) \\ = 0.95^{40} \cdot \frac{20 \cdot 19}{2} 0.05^2 \cdot 0.95^{18} \approx 2.42\%$$

Svar: $\mathbb{P}(\text{acceptera}) = 76\%$

Tabeller för dubbel provtagningsplan

- Som ni märker så kan det bli lite pilligt att räkna ut $L(p)$.
- I boken finns tabeller för vissa specialfall av dubbel provtagningsplan (sidan 119).
- Det finns en tabell för $n_2 = n_1$ och en för $n_2 = 2n_1$. I båda fallen då vi har en producentrisk $\alpha = 5\%$ och en konsumentrisk $\beta = 10\%$.
  Dessa är alltså de enda fallen vi kan använda tabellerna för.

Tabell: Tabell för dubbel provtagningsplan när $n_2 = n_1$ och $\alpha = 5\%, \beta = 10\%$.

Provtagningsplan nr	$\frac{p_2}{p_1}$	Acceptanstal		Approximativt värde på $n_1 p$ då $L(p) =$		
		c_1	c_2	0.95	0.50	0.10
1	11.90	0	1	0.21	1.00	2.50
2	7.54	1	2	0.52	1.82	3.92
3	6.79	0	2	0.43	1.42	2.96
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Vi bestämmer $p_1 = 0.05$ och $p_2 = 0.375$. Det ger $\frac{p_2}{p_1} \approx 7.54$.

Tabell: Tabell för dubbel provtagningsplan när $n_2 = n_1$ och $\alpha = 5\%, \beta = 10\%$.

Provtagningsplan nr	$\frac{p_2}{p_1}$	Acceptanstal		Approximativt värde på $n_1 p$ då $L(p) =$		
		c_1	c_2	0.95	0.50	0.10
1	11.90	0	1	0.21	1.00	2.50
2	7.54	1	2	0.52	1.82	3.92
3	6.79	0	2	0.43	1.42	2.96
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Vi bestämmer $p_1 = 0.05$ och $p_2 = 0.375$. Det ger $\frac{p_2}{p_1} \approx 7.54$.

Tabell: Tabell för dubbel provtagningsplan när $n_2 = n_1$ och $\alpha = 5\%, \beta = 10\%$.

Provtagningsplan nr	$\frac{p_2}{p_1}$	Acceptanstal		Approximativt värde på $n_1 p$ då $L(p) =$		
		c_1	c_2	0.95	0.50	0.10
1	11.90	0	1	0.21	1.00	2.50
2	7.54	1	2	0.52	1.82	3.92
3	6.79	0	2	0.43	1.42	2.96
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Vi bestämmer $p_1 = 0.05$ och $p_2 = 0.375$. Det ger $\frac{p_2}{p_1} \approx 7.54$.

Eftersom $L(0.05) = 0.95$ så är $n_1 = n_2 = \frac{0.52}{0.05} = 10.4 \approx 11$.

Tabell: Tabell för dubbel provtagningsplan när $n_2 = n_1$ och $\alpha = 5\%, \beta = 10\%$.

Provtagningsplan nr	$\frac{p_2}{p_1}$	Acceptanstal		Approximativt värde på $n_1 p$ då $L(p) =$		
		c_1	c_2	0.95	0.50	0.10
1	11.90	0	1	0.21	1.00	2.50
2	7.54	1	2	0.52	1.82	3.92
3	6.79	0	2	0.43	1.42	2.96
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Vi bestämmer $p_1 = 0.05$ och $p_2 = 0.375$ så att $\frac{p_2}{p_1} \approx 7.54$. Eftersom $L(0.05) = 0.95$ så är $n_1 = n_2 = \frac{0.52}{0.05} = 10.4 \approx 11$. $c_1 = 1, c_2 = 2.$

Tabell: Tabell för dubbel provtagningsplan när $n_2 = n_1$ och $\alpha = 5\%, \beta = 10\%$.

Provtagningsplan nr	$\frac{p_2}{p_1}$	Acceptanstal		Approximativt värde på $n_1 p$ då $L(p) =$		
		c_1	c_2	0.95	0.50	0.10
1	11.90	0	1	0.21	1.00	2.50
2	7.54	1	2	0.52	1.82	3.92
3	6.79	0	2	0.43	1.42	2.96
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Vi bestämmer $p_1 = 0.05$ och $p_2 = 0.375$ så att $\frac{p_2}{p_1} \approx 7.54$. Eftersom $L(0.05) = 0.95$ så är $n_1 = n_2 = \frac{0.52}{0.05} = 10.4 \approx 11$. $c_1 = 1, c_2 = 2$. $r_2 = c_2 + 1$ och $r_1 = r_2$ ingår i modellen för tabellen.

Problem: 1.12 a) (SK)

Bestäm en dubbel provtagningsplan för $n_1 = n_2$, $L(0.01) = 0.95$ och $L(0.04) = 0.10$.

Problem: 1.12 a) (SK)

Bestäm en dubbel provtagningsplan för $n_1 = n_2$, $L(0.01) = 0.95$ och $L(0.04) = 0.10$.

Tabell: Tabell för dubbel provtagningsplan när $n_2 = n_1$ och $\alpha = 5\%, \beta = 10\%$.

Provtagningsplan nr	$\frac{p_2}{p_1}$	Acceptanstal		Approximativt värde på $n_1 p$ då $L(p) =$		
		c_1	c_2	0.95	0.50	0.10
1	11.90	0	1	0.21	1.00	2.50
2	7.54	1	2	0.52	1.82	3.92
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
7	3.88	2	5	1.43	3.20	5.55
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tabell: Tabell för dubbel provtagningsplan när $n_2 = n_1$ och $\alpha = 5\%, \beta = 10\%$.

Prov-tagningsplan nr	$\frac{p_2}{p_1}$	Acceptanstal		Approximativt värde på $n_1 p$ då $L(p) =$		
		c_1	c_2	0.95	0.50	0.10
1	11.90	0	1	0.21	1.00	2.50
2	7.54	1	2	0.52	1.82	3.92
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
7	3.88	2	5	1.43	3.20	5.55
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\frac{p_2}{p_1} = 4 \approx 3.88.$

Tabell: Tabell för dubbel provtagningsplan när $n_2 = n_1$ och $\alpha = 5\%, \beta = 10\%$.

Prov-tagningsplan nr	$\frac{p_2}{p_1}$	Acceptanstal		Approximativt värde på $n_1 p$ då $L(p) =$		
		c_1	c_2	0.95	0.50	0.10
1	11.90	0	1	0.21	1.00	2.50
2	7.54	1	2	0.52	1.82	3.92
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
7	3.88	2	5	1.43	3.20	5.55
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$\frac{p_2}{p_1} = 4 \approx 3.88.$
$c_1 = 2, c_2 = 5, r_1 = r_2 = 6.$

Tabell: Tabell för dubbel provtagningsplan när $n_2 = n_1$ och $\alpha = 5\%, \beta = 10\%$.

Prov-tagningsplan nr	$\frac{p_2}{p_1}$	Acceptanstal		Approximativt värde på $n_1 p$ då $L(p) =$		
		c_1	c_2	0.95	0.50	0.10
1	11.90	0	1	0.21	1.00	2.50
2	7.54	1	2	0.52	1.82	3.92
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
7	3.88	2	5	1.43	3.20	5.55
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$\frac{p_2}{p_1} = 4 \approx 3.88.$
$c_1 = 2, c_2 = 5, r_1 = r_2 = 6.$
$L(0.01) = 95\% \Rightarrow n_1 = \frac{1.43}{0.01} = 143.$
$L(0.04) = 10\% \Rightarrow n_1 = \frac{5.55}{0.04} = 138.75.$ Hence
$n_2 = n_1 = \frac{138.75+143}{2} = 140.874.$

Problem: 1.12 a) (SK)

Bestäm en dubbel provtagningsplan för $n_1 = n_2$, $L(0.01) = 0.95$ och $L(0.04) = 0.10$.

Lösning: 1.12 a) (SK)

$c_1 = 2, c_2 = 5, r_1 = r_2 = 6,\ n_2 = n_1 = 141.$

Sammanfattning av dagens innehåll

- Dubbel provtagningsplan.
  Börja med att titta på ett mindre urval. Om väldigt många eller väldigt få är defekta: dra en slutsats. Om det är lite oklart: kontrollera fler.
  Detta ger mindre antal kontrollerade enheter (i genomsnitt) jämfört med en enkel provtagningsplan.
- Design av dubbelprovtagningsplan via tabell.
  Givet en producentrisk på 5% och en konsumentrisk på 10% samt $n_1 = n_2$ eller $n_2 = 2n_1$ kan en dubbel provtagningsplan läsas ut från tabellerna på sidan 119 i boken.