LMA521: Statistisk kvalitetsstyrning

Föreläsning 8

Anders Hildeman

Föregående föreläsningar

Acceptanskontroll:
Hur man skall kontrollera producerade enheter så att man kan garantera kvalitet samtidigt som kontrollen inte blir för kostsam att genomföra.

Styrande kontroll:
Hur man skall upptäcka förändringar i produktionsprocessen.

Kapabilitet:
Hur man skall relatera styrande kontroll till de kvalitetskrav som produkten måste uppfylla.

Dagens innehåll

Problemlösning:

1. Problem 7 Tenta 160113
2. Problem 4 b) Tenta 160113
3. Problem 7 Tenta 150317
4. Problem 5 Tenta 150317

Problem: 7 tenta 160113

a) Beräkna l_{AC}

Nr	A	B	C	D	AB	AC	AD	...	y
1	-	-	-	-				...	20.1
2	+	-	-	-				...	22.9
3	-	+	-	-				...	19.8
4	+	+	-	-				...	25.0
5	-	-	+	-				...	18.1
6	+	-	+	-				...	27.0
7	-	+	+	-				...	19.0
8	+	+	+	-				...	25.2
9	-	-	-	+				...	20.2
10	+	-	-	+				...	22.9
11	-	+	-	+				...	20.2
12	+	+	-	+				...	26.5
13	-	-	+	+				...	19.2
14	+	-	+	+				...	22.8
15	-	+	+	+				...	18.3
16	+	+	+	+				...	24.1

Problem: 7 tenta 160113

a) Beräkna l_{AC}

Nr	A	B	C	D	AB	AC	AD	...	y
1	-	-	-	-	+	+	+	...	20.1
2	+	-	-	-	-	-	-	...	22.9
3	-	+	-	-	-	+	+	...	19.8
4	+	+	-	-	+	-	-	...	25.0
5	-	-	+	-	+	-	+	...	18.1
6	+	-	+	-	-	+	-	...	27.0
7	-	+	+	-	-	-	+	...	19.0
8	+	+	+	-	+	+	-	...	25.2
9	-	-	-	+	+	+	-	...	20.2
10	+	-	-	+	-	-	+	...	22.9
11	-	+	-	+	-	+	-	...	20.2
12	+	+	-	+	+	-	+	...	26.5
13	-	-	+	+	+	-	-	...	19.2
14	+	-	+	+	-	+	+	...	22.8
15	-	+	+	+	-	-	-	...	18.3
16	+	+	+	+	+	+	+	...	24.1

$$
\begin{aligned}
l_{AC} &= \frac{20.1 + 19.8 + 27.0 + 25.2 + 20.2 + 20.2 + 22.8 + 24.1}{8} \\
&- \frac{22.9 + 25.0 + 18.1 + 19.0 + 22.9 + 26.5 + 19.2 + 18.3}{8} \\
&= \frac{179.4 - 171.9}{8} = 0.9375
\end{aligned}
$$

Problem: 7 tenta 160113

b) Antag en reducerad försöksplan. Om man valt generatorerna $E = AB, F = AC, G = ABCD$. Beräkna alla ord samt upplösningen.

Problem: 7 tenta 160113

b) Antag en reducerad försöksplan. Om man valt generatorerna $E = AB, F = AC, G = ABCD$. Beräkna alla ord samt upplösningen.

$$I_1 = ABE, \quad I_2 = ACF, \quad I_3 = ABCDG, \quad I_1 I_2 = BCEF$$
$$I_1 I_3 = CDEG, \quad I_2 I_3 = BDFG, \quad I_1 I_2 I_3 = ADEFG$$

Upplösning III!

Problem: 7 tenta 160113

b) Antag en reducerad försöksplan. Om man valt generatorerna $E = AB, F = AC, G = ABCD$. Beräkna alla ord samt upplösningen.

$$I_1 = ABE, \quad I_2 = ACF, \quad I_3 = ABCDG, \quad I_1 I_2 = BCEF$$
$$I_1 I_3 = CDEG, \quad I_2 I_3 = BDFG, \quad I_1 I_2 I_3 = ADEFG$$

Upplösning III!

Problem: 7 tenta 160113

c) Välj andra generatorer som ger högre upplösning.

Problem: 7 tenta 160113

b) Antag en reducerad försöksplan. Om man valt generatorerna $E = AB, F = AC, G = ABCD$. Beräkna alla ord samt upplösningen.

$$I_1 = ABE, \quad I_2 = ACF, \quad I_3 = ABCDG, \quad I_1 I_2 = BCEF$$
$$I_1 I_3 = CDEG, \quad I_2 I_3 = BDFG, \quad I_1 I_2 I_3 = ADEFG$$

Upplösning III!

Problem: 7 tenta 160113

c) Välj andra generatorer som ger högre upplösning.

$E = ABC, F = BCD, G = ACD$

Problem: 7 tenta 160113

b) Antag en reducerad försöksplan. Om man valt generatorerna $E = AB, F = AC, G = ABCD$. Beräkna alla ord samt upplösningen.

$$I_1 = ABE, \quad I_2 = ACF, \quad I_3 = ABCDG, \quad I_1 I_2 = BCEF$$
$$I_1 I_3 = CDEG, \quad I_2 I_3 = BDFG, \quad I_1 I_2 I_3 = ADEFG$$

Upplösning III!

Problem: 7 tenta 160113

c) Välj andra generatorer som ger högre upplösning.

$E = ABC, F = BCD, G = ACD$

$$I_1 = ABCE, \quad I_2 = BCDF, \quad I_3 = ACDG, \quad I_1 I_2 = ADEF$$
$$I_1 I_3 = BDEG, \quad I_2 I_3 = ABFG, \quad I_1 I_2 I_3 = CEFG$$

Upplösning IV!

Problem: 4 tenta 160113

En chipsfabrik tillverkar påsar med pepparchips. Affären som beställt påsarna har angivit övre toleransgräns $T_ö = 255$ gram och undre toleransgräns $T_u = 245$ gram. Vi antar att påsarnas vikter är normalfördelade med okänt väntevärde, μ, och okänd standardavvikelse, σ. Vi antar också att alla påsars vikt är oberoende av varandra.
7 påsar har inspekterats med följande resultat:

$$243.4 \quad 245.0 \quad 243.3 \quad 245.3 \quad 245.1 \quad 246.3 \quad 244.2$$

a) Beräkna ett 95% konfidensintervall för μ.

$$\bar{x} = \frac{243.4 + 245.0 + 243.3 + 245.3 + 245.1 + 246.3 + 244.2}{7} = 244.657$$

$$s^2 = \frac{243.4^2 + 245.0^2 + 243.3^2 + 245.3^2 + 245.1^2 + 246.3^2 + 244.2^2}{7-1}$$

$$- \frac{7}{7-1} \cdot 244.657^2 = 1.2577$$

$$s = \sqrt{1.2577} = 1.0845$$

$$\mu = \bar{x} \pm t_{2.5\%}(df = 7-1)\frac{s}{\sqrt{n}} = 244.657 \pm 2.45 \cdot \frac{1.0845}{\sqrt{7}}$$

$$= 244.657 \pm 1.0043 = [243.65; 245.66]$$

Problem: 4b) tenta 160113

Skatta kapabilitetsindex och korrigerat kapabilitetsindex för tillverkningsprocessen. Vad kan vi dra för slutsats?

Problem: 4b) tenta 160113

Skatta kapabilitetsindex och korrigerat kapabilitetsindex för tillverkningsprocessen. Vad kan vi dra för slutsats?

$$C_p = \frac{T_ö - T_u}{6\sigma} \approx \frac{T_ö - T_u}{6s} = \frac{255 - 245}{6 \cdot 1.0845} = 1.5368$$

$$CM = 2\frac{|M - \mu|}{T_ö - T_u} \approx 2\frac{|250 - 244.657|}{10} = \frac{5.343}{5} = 1.0686$$

$$C_{pk} = C_p \cdot (1 - CM) = 1.5368 \cdot (1 - 1.0686) = -0.1054$$

$C_p > 1.33$ så spridningen är tillräckligt liten för att kvalitetskraven skall uppfyllas men $C_{pk} < 1.33$ så väntevärdet av processen är dåligt matchat till målvärdet (dåligt centrerad). Därför är processen inte godtagbar för kundens krav.

Problem: 7 tenta 150317

Ett företag köper in lysdioder. De använder en dubbel provtagningsplan för att testa kvaliteten. I urval 1 testas 80 dioder. Om antalet defekta i urval 1 är mindre än eller lika med 2 accepteras partiet. Om antalet defekta är större än 5 avvisas partiet. I urval 2 testas 80 nya lysdioder. Om antalet defekta från båda urvalen är större än eller lika med 5 avvisas partiet, annars accepteras det.

Antag felkvoten i partiet egentligen är 5%. Vi antar att N är så stort att $\frac{80}{N} < 1\%$.

Problem: 7 tenta 150317

Ett företag köper in lysdioder. De använder en dubbel provtagningsplan för att testa kvaliteten. I urval 1 testas 80 dioder. Om antalet defekta i urval 1 är mindre än eller lika med 2 accepteras partiet. Om antalet defekta är större än 5 avvisas partiet. I urval 2 testas 80 nya lysdioder. Om antalet defekta från båda urvalen är större än eller lika med 5 avvisas partiet, annars accepteras det.
Antag felkvoten i partiet egentligen är 5%. Vi antar att N är så stort att $\frac{80}{N} < 1\%$.

$$n_1 = n_2 = 80, \quad r_1 = r_2 = 5$$
$$c_1 = 2, \quad c_2 = 4, \quad p = 5\%$$

Dessutom kan vi anta både binomial- och Poisson-approximation $\frac{160}{N} + 5\% < 7\% < 10\%$.

Problem: 7 a) tenta 150317

Beräkna sannolikheten att partiet avvisas (Motivera approximationer).

Problem: 7 a) tenta 150317

Beräkna sannolikheten att partiet avvisas (Motivera approximationer).

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{parti avvisas}) &= \mathbb{P}(\xi_1 \geq 5 \cup (\xi_1 + \xi_2 \geq 5 \cap 2 < \xi_1 < 5)) \\
&= \mathbb{P}(\xi_1 \geq 5) + \mathbb{P}(2 < \xi_1 < 5 \cap \xi_1 + \xi_2 \geq 5) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\xi_1 < 5) + \sum_{i=3}^{4} \mathbb{P}(\xi_1 = i)\,(1 - \mathbb{P}(\xi_2 \leq 4 - i)) \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{4} \mathbb{P}(\xi_1 = i) + \sum_{i=3}^{4} \mathbb{P}(\xi_1 = i) \left(1 - \sum_{k=0}^{4-i} \mathbb{P}(\xi_2 = k)\right)
\end{aligned}
$$

$$\xi_1 \overset{D}{=} \xi_2 \sim Bin(n = 80, p = 5\%)$$

$\xi_1 \overset{D}{=} \xi_2$ betyder “lika i fördelning”, alltså att båda slumpvariablerna har samma sannolikhetsfördelning.

$$\mathbb{P}(\xi = 0) = \binom{80}{0} 0.05^0 \cdot 0.95^{80} = 1.65\%$$

$$\mathbb{P}(\xi = 1) = \binom{80}{1} 0.05^1 \cdot 0.95^{79} = 6.95\%$$

$$\mathbb{P}(\xi = 2) = \binom{80}{2} 0.05^2 \cdot 0.95^{78} = 14.46\%$$

$$\mathbb{P}(\xi = 3) = \binom{80}{3} 0.05^3 \cdot 0.95^{77} = 19.78\%$$

$$\mathbb{P}(\xi = 4) = \binom{80}{4} 0.05^4 \cdot 0.95^{76} = 20.04\%$$

$$\mathbb{P}(\text{parti avvisas}) = 1 - \sum_{i=0}^{4} \mathbb{P}(\xi_1 = i) + \sum_{i=3}^{4} \mathbb{P}(\xi_1 = i) \left(1 - \sum_{k=0}^{4-i} \mathbb{P}(\xi_2 = k)\right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(\xi = 0)(1 + \mathbb{P}(\xi = 3) + \mathbb{P}(\xi = 4))$$
$$- \mathbb{P}(\xi = 1)(1 + \mathbb{P}(\xi = 3)) - \mathbb{P}(\xi = 2)$$
$$- \mathbb{P}(\xi = 3)(1 - 1) - \mathbb{P}(\xi = 4)(1 - 1) = 1$$
$$- 0.0165(1 + 0.1978 + 0.2004) - 0.0695(1 + 0.1978) - 0.1446$$

$$= 74.91\%$$

Problem: 7 b) tenta 150317

Låt A vara händelsen att man går vidare från urval 1 till urval 2. Beräkna den betingade händelsen att partiet accepteras givet händelse A.

Problem: 7 b) tenta 150317

Låt A vara händelsen att man går vidare från urval 1 till urval 2. Beräkna den betingade händelsen att partiet accepteras givet händelse A.

$$\mathbb{P}(\text{partiet accepteras}|A) = \frac{\mathbb{P}(\text{partiet accepteras} \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$= \frac{\sum_{i=3}^{4} \mathbb{P}(\xi_1 = i)\mathbb{P}(\xi_2 \leq 4 - i)}{\mathbb{P}(3 \leq \xi \leq 4)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\xi = 3)(\mathbb{P}(\xi = 0) + \mathbb{P}(\xi = 1)) + \mathbb{P}(\xi = 4)\mathbb{P}(\xi = 0)}{\mathbb{P}(\xi = 3) + \mathbb{P}(\xi = 4)}$$

$$= \frac{0.1978(0.0165 + 0.0695) + 0.2004 \cdot 0.0165}{0.1978 + 0.2004} = \frac{0.0203}{0.3982} = 5.10\%$$

Problem: 7 c) tenta 150317 (extrauppgift)

Vad är $ATI(5\%)$?

$$ATI(5\%) = 80 \cdot \mathbb{P}(\text{acceptera i urval I})$$
$$+ 160 \cdot \mathbb{P}(\text{acceptera i urval II}) + N\mathbb{P}(\text{avvisa})$$

$$\mathbb{P}(\text{acceptera i urval I}) = \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}(\xi = i)$$
$$= 0.0165 + 0.0695 + 0.1446 = 23.06\%$$

$$\mathbb{P}(\text{acceptera i urval II}) = 1 - \mathbb{P}(\text{acceptera i urval I}) - \mathbb{P}(\text{avvisa})$$
$$= 1 - 0.2306 - 0.7491 = 2.03\%$$

$$ATI(5\%) = 80 \cdot 0.2306 + 160 \cdot 0.0203 + N \cdot 0.7491$$
$$= 21.7 + N \cdot 0.7491$$

Problem: 7 d) tenta 150317 (extrauppgift)

Vad är $ASN(5\%)$?

$$\begin{aligned} ASN(5\%) &= 80 \cdot \mathbb{P}(\text{acceptera eller avvisa i urval I}) \\ &\quad + 160 \cdot \mathbb{P}(\text{acceptera eller avvisa i urval II}) \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(\text{acceptera eller avvisa i urval II}) = \mathbb{P}(A) = 0.3982$$

$$\mathbb{P}(\text{acceptera eller avvisa i urval I}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 0.6018$$

$$\begin{aligned} ASN(5\%) &= 80 \cdot 0.6018 + 160 \cdot 0.3982 = 48.144 + 63.712 \\ &= 111.856 \end{aligned}$$

Problem: 5 tenta 150317

En ingenjör har fått i uppdrag att konstruera en enkel provtagningsplan. Ett parti på 10 enheter skall köpas in. Ingenjörens enkla provtagningsplan är sådan att man tar ett urval på 3 enheter. Ifall urvalet innehåller r eller fler defekta enheter så skall partiet avvisas. Annars accepteras partiet. Ingenjören har slarvat bort en del av sina anteckningar så hon kan inte se vilket r hon använde men hon kan se att om antalet defekta i partiet är 3, så accepteras partiet med sannolikhet 49/60 (i decimaltal ungefär 0.8167). Bestäm r.

Problem: 5 tenta 150317

En ingenjör har fått i uppdrag att konstruera en enkel provtagningsplan. Ett parti på 10 enheter skall köpas in. Ingenjörens enkla provtagningsplan är sådan att man tar ett urval på 3 enheter. Ifall urvalet innehåller r eller fler defekta enheter så skall partiet avvisas. Annars accepteras partiet. Ingenjören har slarvat bort en del av sina anteckningar så hon kan inte se vilket r hon använde men hon kan se att om antalet defekta i partiet är 3, så accepteras partiet med sannolikhet 49/60 (i decimaltal ungefär 0.8167). Bestäm r.

Enkel provtagningsplan med okänt avvisningstal, r.
$N = 10$, $n = 3$, $L(p = \frac{3}{10}) = \frac{49}{60}$

Enkel provtagningsplan med okänt avvisningstal, r.
$N = 10$, $n = 3$, $L(p = \frac{3}{10}) = \frac{49}{60}$

Eftersom $\frac{n}{N} > 10$ så kan vi inte anta binomialfördelning. Vi måste därför jobba med en hypergeometrisk fördelning!

$$\mathbb{P}(\xi = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N-Np}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{3}{k}\binom{7}{3-k}}{\binom{10}{3}}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Enkel provtagningsplan med okänt avvisningstal, r.
$N = 10,\ n = 3,\ L(p = \frac{3}{10}) = \frac{49}{60}$

Eftersom $\frac{n}{N} > 10$ så kan vi inte anta binomialfördelning. Vi måste därför jobba med en hypergeometrisk fördelning!

$$\mathbb{P}(\xi = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N-Np}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{3}{k}\binom{7}{3-k}}{\binom{10}{3}}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Vi vet att

$$\mathbb{P}(\xi < r) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\binom{3}{k}\binom{7}{3-k}}{\binom{10}{3}} = \frac{49}{60}$$

Enkel provtagningsplan med okänt avvisningstal, r.
$N = 10$, $n = 3$, $L(p = \frac{3}{10}) = \frac{49}{60}$

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120, \qquad \binom{3}{0} = 1$$

$$\binom{3}{1} = 3, \qquad \binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

$$\binom{3}{3} = 1$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35, \qquad \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

$$\binom{7}{1} = 7, \qquad \binom{7}{0} = 1$$

Låt oss räkna upp sannolikheterna:

$$\mathbb{P}(\xi = 0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1 \cdot 35}{120}$$

$$\mathbb{P}(\xi = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{3 \cdot 21}{120} = \frac{63}{120}$$

$$\mathbb{P}(\xi = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{7}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{3 \cdot 7}{120} = \frac{21}{120}$$

$$\mathbb{P}(\xi = 3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{7}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{1 \cdot 1}{120} = \frac{1}{120}$$

$$\mathbb{P}(\xi \leq 1) = \frac{35 + 63}{120} = \frac{98}{120} = \frac{49}{60}$$

Bingo!! $c = 1$ därför måste $r = c + 1 = 2$.