Lösning till LMA201 31/8 08:30-12.30

1. Vid planeringen av ett bostadsområde med 1000 hushåll (lägenheter) vill man dimensionera tillgången till parkeringsplatser. Låt ξ_j vara antal bilar i hushåll nr j, $j = 1, 2, \ldots, 1000$.

$$\eta := \sum_{j=1}^{1000} \xi_j \in \mathrm{N}(800, 0.6 \cdot \sqrt{1000}).$$

   (a) Sannolikheten att det kommer vara minst 820 bilar i bostadsområdet är

$$1 - \Phi\left(\frac{820 - 800}{0.6 \cdot \sqrt{1000}}\right) = \{\text{Tabell för N(0,1)}\} = 0.14592.$$

   Svar: Sannolikheten att det skall finnas minsta 820 bilar är 15%.

   (b) Sätt parkeringsplatser måste bostadsområdet till n. Då gälller

$$0.90 = P(\eta \leq n) = \Phi\left(\frac{n - 800}{6\sqrt{10}}\right) \iff \frac{n - 800}{6\sqrt{10}} = 1.28 \iff n = 824.3$$

   Svar: Antal P-platser skall vara minst 825 för att sannolikheten att alla bilar får plats är (minst) 90%.

   Lämpliga approximationer kan användas.

2. (a) Bestäm konstanten C...

$$1 = C\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = 2C\int_{0}^{1}(1-x^2)dx = 2C\left(x - x^3/3\right)_0^1 = 2C \cdot \frac{2}{3} \iff C = \frac{3}{4}.$$

   (b) Väntevärdet $\mu = 0$ och varians

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx = 2 \cdot \frac{3}{4}\int_{0}^{1}(x^2 - x^4)dx = \ldots \frac{1}{5}.$$

   Standardavvikelsen är $\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

3. Givet sex oberoende mätningar som gav värdena $22, 20, 22, 30, 26, 24$, som ger $\overline{x} = 24.0$ och $s = 3.57771\ldots$ av en normalfördelad stokastisk variabel. Ett (symmetriskt) 90%:s konfidensintervall för μ

   (a) då $\sigma = 1.0$ med $\lambda_{0.05} = 1.65$:

$$\left[\overline{x} - \frac{\lambda_{0.05} \cdot 1.0}{\sqrt{6}}, \overline{x} + \frac{\lambda_{0.05} \cdot 1.0}{\sqrt{6}}\right] = [23.3, 24.7]$$

   (b) och då σ okänd:

$$\left[\overline{x} - \frac{t_{5,0.05} \cdot 3.57771}{\sqrt{6}}, \overline{x} + \frac{t_{5,0.05} \cdot 3.57771}{\sqrt{6}}\right] = [21.0, 26.9]$$

4. Följande sannolikheter är för händelserna A och B kända:

$$P(A) = 0.6, \quad P(A \cup B) = 0.8, \quad P(A \cap B) = 0.2.$$

   (a) Sannolikheten

$$P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = 0.8 + 0.2 - 0.6 = 0.4.$$

   (b) Sannolikheten

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5.$$

   (c) Är A och B oberoende?

$$P(A) \cdot P(B) = 0.6 \cdot 0.5 = 0.3 \neq 0.2$$

   och alltså beroende (ej oberoende).

5. (a) Beräkna antal möjliga registreringsnummer i det nuvarande systemet...

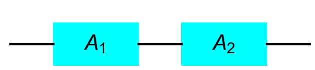
$$22^3 \cdot 10^3 = 10\,648\,000 \approx 10^6.$$

   (b) Antalet reg. nr, med det nya systemet är 32^4 ($32 = 22 + 10$) och

$$32^4 = 2^{20} = 1\,048\,576 < 22^3 \cdot 10^3$$

   enligt (a). Alltså färre reg.nr med det nya systemet.

6. Oberoende och exponentialfördelade med förväntade livslängder på 2 år respektive 4 år. Elsystemet fungerar bara om båda komponenterna fungerar. Motsvarande värden på λ är $\lambda_1 = 1/2$ respektive $\lambda_2 = 1/4$.



(a) Sätt livslängden för komponent A_1 till ξ_1 och livslängden på komponent A_2 till ξ_2. Sannolikheten att systemet fungerar efter ett år är

$$P(\xi_1 > 1 \vee \xi_2 > 1) = \{\text{ober.}\} = e^{-\lambda_1 \cdot 1} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot 1} = e^{-1/2-1/4} = e^{-0.75} \approx 0.472.$$

(b) Sannolikheten att systemet fungerar, om komponent A_2 fungerar (efter ett år) är

$$P(\min(\xi_1, \xi_2) > 1 | \xi_1 > 1) = \{\text{ober.}\} = P(\xi_2 > 1) = 0.78.$$

(c) Fördelningens stok. var. är $\eta := \min(\xi_1, \xi_2)$ och

$$\begin{aligned} P(\min(\xi_1, \xi_2) > t) &= P(\xi_1 \vee \xi_2 > t) = \{\text{ober.}\} = P(\xi_1 > t) \cdot P(\xi_2 > t) = \\ &= e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \Leftrightarrow P(t \leq \eta) = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \end{aligned}$$

Fördelningen för elsystemets livslängd är $\eta \in \exp(3/4)$.

7. (a) Svar: $l_{AC} = -0.5$ och $l_{ABC} = -2.5$.

   (b) Orden blir $ABCD$, BCE, ACF, ADE, BDF, $ABEF$ och $CDEF$. Därför blir upplösningen III och alias till B blir ACD, CE, $ABCF$, $ABDE$, DF, AEF och $BCDEF$.

8. (a) Beteckna den stationära fördelningen med $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$. Lösning av ekvations-systemet $\pi P = \pi$ under villkoret att $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ ger att $\pi = (1/5, 2/5, 2/5)$.

   (b) I detta fall är kedjan reducibel vilket gör att det inte finns en *unik* stationär fördelning. Ekvationssystemet $\pi P = \pi$ under villkoret att $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ har oändligt många lösningar, nämligen $(1/2 - s/2, 1/2 - s/2, s)$ för $s \in [0, 1]$.

9. Fördelningsfunktionen för η ges av (för $x \in [0, 1]$)

$$F(x) = P(\eta \leq x) = P(\sqrt{\xi} \leq x) = P(\xi \leq x^2) = \int_0^{x^2} 1dt = x^2.$$

I det näst sista steget använde vi att frekvensfunktionen för ξ är 1 på intervallet $[0, 1]$ och 0 för övrigt. Till sist använder vi att frekvensfunktionen för η är derivatan av fördelningsfunktionen, det vill säga $2x$ för $x \in [0, 1]$ och 0 för övrigt.