Lösningar LMA201 (20170110)

1. Se LMA521 uppgift 1

2. — " — 2

3. — " — 3

4. Se ~~nedan~~ nästa sida

5. Se LMA521 uppgift 5

6. uppgift 6 är uppgift 6a på LMA521

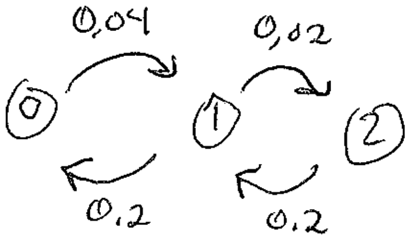
7. Se LMA521 uppgift 7

8. Se ~~[illegible]~~ nästa sida

9. Se uppgift 8 LMA521.

4.) $X(t)$ = antalet ~~hela~~ trasiga maskiner vid tid t.

$X(t)$ är en Markovkedja i kontinuerlig tid med tillståndsrum $\{0, 1, 2\}$.



Sök $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$ för den stationära fördelningen.

Metod 1: Kom ihåg att $\pi_1 = \frac{0,04}{0,2}\pi_0$ och $\pi_2 = \frac{0,04 \cdot 0,02}{0,2 \cdot 0,2}\pi_0$

och $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$.

Så $\pi_0 + \frac{0,04\pi_0}{0,2} + \frac{0,04 \cdot 0,02}{0,2 \cdot 0,2}\pi_0 = 1 \iff$

$$\pi_0(1 + 0.2 + 0,02) = 1 \iff \pi_0 = \frac{1}{1,22} \approx 0,82$$

$\implies \pi_1 = 0,2\pi_0 \approx 0.16$

$\implies \pi_2 = 0,02\pi_0 = 0,0164$

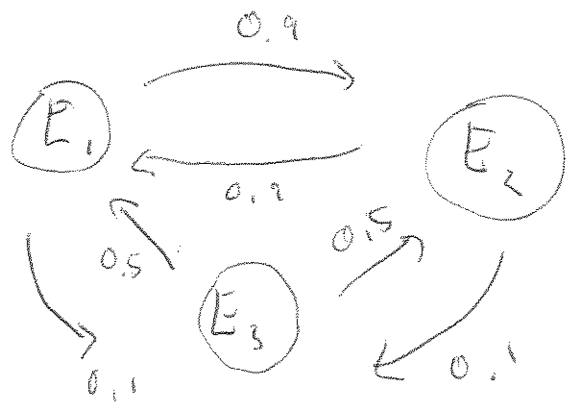
Svar: Sannolikheten för exakt 1 hel maskin vid en given punkt långt in i framtiden $\approx \boxed{0.16}$.

8. Markovkedja i diskret tid

E_1 = Anna

E_2 = Anders

E_3 = Josefina



$$p^{(0)} = (1, 0, 0)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}9 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Josefina har bollen efter 2 kast endast om bollen går till Anders och sedan till Josefina.

Detta har sannolikhet $P_{12} \cdot P_{23} = 0{,}9 \cdot 0{,}1 = \boxed{0{,}09}$

b) Bestäm stationära fördelningen: $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$

$$\pi P = \pi \iff (\pi_1, \pi_2, \pi_3)\begin{pmatrix} 0 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}9 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$$

$$\iff (0{,}9\pi_2 + 0{,}5\pi_3,\ 0{,}9\pi_1 + 0{,}5\pi_3,\ 0{,}1\pi_1 + 0{,}1\pi_2) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$$

$\Rightarrow \quad 0,9\pi_2 + 0,5\pi_3 = \pi_1 \qquad (1)$

$0,9\pi_1 + 0,5\pi_3 = \pi_2 \qquad (2)$

$0,1\pi_1 + 0,1\pi_2 = \pi_3 \,. \qquad (3)$

Dessutom har vi bivillkoret $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \qquad (4)$

(1) in i (2) ger $0,9(0,9\pi_2 + 0,5\pi_3) + 0,5\pi_3 = \pi_2$

$\Rightarrow 0,81\pi_2 + 0,45\pi_3 + 0,5\pi_3 = \pi_2 \Rightarrow$

$0,19\pi_2 = 0,95\pi_3$

$\pi_2 = \frac{0,95}{0,19}\pi_3 = 5\pi_3$

(1) ger $0,9 \cdot 5\pi_3 + 0,5\pi_3 = \pi_1 \Rightarrow$

$5\pi_3 = \pi_1$

(4) ger $5\pi_3 + 5\pi_3 + \pi_3 = 1 \Rightarrow 11\pi_3 = 1 \Rightarrow \pi_3 = \frac{1}{11}$

Så $\pi_1 = 5\pi_3 = \frac{5}{11}$ & $\pi_2 = 5\pi_3 = \frac{5}{11}$

Så stationära fördelningen är $\left(\frac{5}{11}, \frac{5}{11}, \frac{1}{11}\right)$.

Eftersom $\pi_1 = \frac{5}{11}$ så kommer Anna att ha bollen i $\frac{5}{11} \approx 45,45\,\%$ av totala tiden i långa loppet. #