# Matematisk statistik LMA201
# Lösningar Tentamen 2017-06-07

---

1. Vid en byggnation (byggverksamhet)är byggtiden uppdelad i två moment, anläggning av grund och uppsättning av väggar och tak.
   Tiden $\xi$ för anläggning av grund gäller att $\xi \in N(4.5, 0.6)$ och tiden $\zeta$ för uppsättning av väggar och tak gäller att $\zeta \in N(5.0, 0.8)$, enhet månader.
   $\xi$ och $\zeta$ anses vara oberoende.

   (a) Sannolikheten för att $\xi \geq 4.7$ *och* $\zeta \geq 5.3$ är produkten
   $$P(\xi \geq 4.7)\cdot P(\zeta \geq 5.3) = (1-\Phi\left(\frac{4.7-4.5}{0.6}\right))(1-\Phi\left(\frac{5.3-5.0}{0.8}\right)) \approx 0.36944\cdot 0.3538 \approx 0.1307.$$

   (b) Sannolikheten för att den sammanlagda tiden för de två momenten tar mer tid än 10 månader är
   $$P(\xi + \zeta \geq 10) = 1 - \Phi\left(\frac{10.0-9.5}{1.0}\right) \approx 0.31\,.$$

2. Händelserna $A$ och $B$ är oberoende samt $P(A \cup B) = 0.8$ och $P(A^c) = 0.4$, så att $P(A) = 0.6$. Sannolikheten för händelsen $B$ ges av
   $$\begin{aligned} P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad &= \quad P(A \cup B) \Longleftrightarrow P(B) - P(A \cap B) = P(B)(1 - P(A)) \\ = P(A \cup B) - P(A) & \end{aligned}$$
   $$\Longleftrightarrow \quad P(B) = \frac{P(A \cup B) - P(A)}{1 - P(A)} = 0.5\,.$$

3. Betrakta funktionen... $f(x) = \begin{cases} A(x - x^2), & \text{om } 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = 0, & \text{för övriga } x. \end{cases}$

   (a) Konstanten $A$, så att funktionen blir en frekvensfunktion:
   $$\int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Longrightarrow A = 6\,.$$

   (b) Väntevärde:
   $$\mu := \int_0^1 6x(x - x^2)dx = 6\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] = ... = \frac{1}{2}\,.$$

   (c) Motsvarande varians:
   $$V := \int_0^1 6x^2(x - x^2)dx - \mu^2 = \frac{3}{2} - \frac{6}{5} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}\,.$$

4. Gipsplattor skall täcka en 100 meter lång vägg. Deras bredder har väntevärde 1.00 m och standardavvikelse 0.005 meter och kan betraktas som oberoende.

Sannolikheten att 100 plattors sammanlagda bredd understiger 99.9 meter med Centrala gränsvärdessatsen: Låt $\xi_k$ vara bredden på gipsplatta nummer $k$. Sätt $\sum_{k=1}^{100} \xi_k = \zeta$. Då gäller

$$\mu(\zeta) = 100.0, \quad \sigma(\zeta) = 0.005 \cdot \sqrt{100} = 0.05\,.$$

Med CGS är sökt sannolikhet approximativt

$$\Phi\left(\frac{99.9 - 100.0}{0.1}\right) = \Phi(-1.0) = 1 - \Phi(1.0) \approx 0.16\,.$$

5. Vid en lastbilsfirma finns nio lastbilar, numrerade 1,2...9.
De skall samtliga användas för att lasta vägsalt i staden X:s hamn.
Två lastbilar skall till stad A, tre skall till stad B, och fyra skall till stad C.

   (a) På hur många sätt kan lastbilarna dirigeras till städerna A, B och C? Antalet sätt är

   $$\binom{9}{2} \cdot \binom{7}{3} = 1260 = \{\text{eller}\} = \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{3} = 1260$$

   (b)

   $$m = \binom{9}{4} \text{ och } g = \binom{2}{2} \cdot \binom{7}{2} \Longrightarrow P = \frac{21}{126} = \frac{1}{6}\,.$$

6. I ett visst varulager har man funnit följande sannolikheter
för förekomsten av larm och inbrott gällande per natt:
Sannolikheten för larm är $0.01 = P(L)$.
Sannolikheten att om det är larm. så är det inbrott är $0.9 = P(I|L)$.
Sannolikheten att det är inbrott om det inte är larm är $0.005 = P(I|L^c)$.
Sannolikheten för inbrott är

$$P(I) = P(I|L) \cdot P(L) + P(I|L^c)P(L^c) \text{ och } P(I \cap L) = P(I|L) \cdot P(L) = 0.01395.$$

Så att sökt sannolikhet är

$$P(L|I) = \frac{P(I \cap L)}{P(I)} = \frac{P(I|L) \cdot P(L)}{P(I)} = \frac{0.009}{0.01395} \approx 0.65 \text{ (Svar)}$$

7. Mätvärdena ger att $\bar{x} = 251.133$ och $s = 2.30072$. Antalet frihetsgrader $n - 1 = 2$, $\alpha = 0.05$ så $t_{0.025}(2) = 4.3$ (enligt rad 2, kolumn 0.05 i t-tabellen). Konfidensintervallet blir

$$\bar{x} \pm \frac{t_{0.025}(2)s}{\sqrt{3}} = \boxed{251.133 \pm 5.71173.}$$

8. (a) Vi beräknar först stationära fördelningen för antalet trasiga komponenter, och vi betecknar denna med $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$. Vi har att (enligt snabb-metoden i boken)

$$\pi_2 = \frac{0.08 \cdot 0.04}{0.3 \cdot 0.6} \pi_0 = \frac{4}{225} \pi_0$$

och

$$\pi_1 = \frac{0.08}{0.3}\pi_0 = \frac{4}{15}\pi_0.$$

Eftersom $\pi_1+\pi_2+\pi_3 = 1$ får vi $\frac{289}{225}\pi_0 = 1$, dvs $\pi_0 = \frac{225}{289}$. Så $\pi_1 = \frac{60}{289}$ och $\pi_2 = \frac{4}{289}$. Alltså är

$$\pi = (\frac{225}{289}, \frac{60}{289}, \frac{4}{289}).$$

Därför blir den stationära fördelningen för antalet *hela* komponenter

$$\boxed{(\frac{4}{289}, \frac{60}{289}, \frac{225}{289})}.$$

(b) Det följer att

$$E(X(t)) = 0 \cdot \frac{4}{289} + 1 \cdot \frac{60}{289} + 2 \cdot \frac{225}{289} = \boxed{\frac{30}{17} \approx 1.7647}$$

om $t$ stort (ungefärligen).

9. (a) $l_B = 9.75$, $l_{BC} = -1.25$, $l_{ABC} = -1.25$

   (b) Man ser att generatorn $D = AB$. Alltså är $I = ABD$ så att alias till $A$ blir $BD$.

10. (a) Den stationära fördelningen blir (genom att lösa $\pi P = \pi$)

$$\pi = \boxed{(3/13, 4/13, 6/13)}.$$

   (b) Det finns inget absorberande tillstånd eftersom diagonalen i $P$ inte innehåller någon 1:a.