Tillämpad matematisk statistik LMA201 (elektro/datas kurs) Tentamen 20190610

Tid: 14.00-18.00
Hjälpmedel: Kursboken **Matematisk Statistik** av Ulla Dahlbom. Formelsamlingen **Tabell- och formelsamling i matematisk statistik, försöksplanering och kvalitetsstyrning** av Håkan Blomqvist. Boken och formelsamlingen få ej innehålla extra anteckningar, men understrykningar, sticks och markeringar är tillåtna. **Chalmersgodkänd räknare.**
Kursansvarig: Reimond Emanuelsson
Telefonvakt: Reimond Emanuelsson, tel. 0708 948 456
Betygsgränser: för betyg 3 krävs minst 20 poäng, för betyg 4 krävs minst 30 poäng, för betyg 5 krävs minst 40 poäng.

Redovisa lösningarna i detalj. Räkna exakt så långt som möjligt. Svaret kan ges numeriskt/approximativt.
OBS: uppgiftstext på TRE sidor!

---

1. (3 poäng) Antag att den kontinuerliga stokastiska variabeln ξ har frekvensfunktion $f(x) = 6x(1-x)$ ifall $0 \leq x \leq 1$ och $f(x) = 0$ för övriga x. Beräkna standardavvikelsen för ξ.

2. (1+1+1+1 poäng) Bilar av ett visst märke råkar ut för fel A med sannolikhet 0.15 och fel B med sannolikhet 0.12. Fel A och fel B uppkommer oberoende av varandra. Vi antar att inga andra fel kan uppkomma. Beräkna följande sannolikheter:
   (a) Sannolikheten för minst ett fel på en given bil.
   (b) Sannolikheten för inget fel.
   (c) Sannolikheten för exakt ett fel.
   (d) Sannolikheten för fel A givet att bilen har fel B.

3. (2+3 poäng) Tiden för ny asfaltsläggning av Götaälvbron beräknas ta tiden $\xi \in \mathrm{N}(3.0, 0.42)$ veckor och tiden för att måla väglinjer beräknas ta tiden $\zeta \in \mathrm{N}(1.0, 0.40)$ veckor. Dessa två tidsåtgångar är oberoende varandra.
   (a) Vad är sannolikheten att asfaltsläggningen tar högst 3.5 veckor?
   (b) Vad är sannolikheten att den totala tiden, d.v.s. tiden för asfaltläggning och vägmålning, tar minst 4.5 veckor?

4. (1+2+3 poäng) Antal inkommande paket till en postterminal per dag är Poissonfördelat $\mathrm{Po}(\lambda)$ med väntevärdet $\lambda = 30.0$. Använd lämpliga approximationer där det behövs nedan.
   (a) Vad är sannolikheten att det under en dag kommer in exakt 30 paket?
   (b) Vad är sannolikheten att det under en dag kommer in fler än 30 paket?
   (c) Vad är sannolikheten att det under en dag har kommit högst 40 paket givet att det har kommit minst 30 paket?

5. (2+4 poäng) Resultatet efter 5 mätningar av en normalfördelad variabel med väntevärde μ och standardavvikelse σ gav

$$35.0, 36.0, 34.5, 32.0, 35.0$$

av en normalfördelad stokastisk variabel. Räknehjälp: Medelvärdet för stickprovet är 34.5 och stickprovs-standardavvikelsen är 1.5.

(a) Bestäm ett tvåsidigt 95%:s konfidensintervall för väntevärdet μ.

(b) Bestäm ett uppåt begränsat 95%:s konfidensintervall för standardavvikelsen σ.

6. (1+2+2+1 poäng) För händelserna A och B vet man att

$$P(A \cap B) = 0.4,\ P(A|B^c) = 0.25,\ \text{och } P(B|A) = 0.8\,.$$

(a) Beräkna $P(A)$.

(b) Beräkna $P(B)$.

(c) För en tredje händelse C gäller att $P(A^c|C) = P(C|A^c)$. Beräkna $P(C)$.

(d) Man vet dessutom att $P(A \cap C^c) = 0.16$. Är A och C oberoende? Argument fordras.

7. (2 + 2 + 2 + 2 poäng)

En mystisk alkemist har sitt laboratorium uppe i ett mörkt tornrum i ett slott på den skotska landsbygden. Där uppe har hon upptäckt formeln för att göra guld av gamla petflaskor och cigarettfimpar.

I hennes formel är renheten guld responsvariabeln, Y (som mäts i karat). Y kan anses approximativt normalfördelad med varians σ^2 och ett väntevärde som beror på faktorernas nivåer. Faktorerna är mängden petflaskor (A), mängden cigarettfimpar (B) samt mängden av en hemlig vätska (C). Formeln för väntevärdet av responsvariablen givet faktorernas nivåer ser ut som följande:

$$\beta_0 + \beta_A x_A + \beta_C x_C + \beta_{BC} x_B x_C. \tag{1}$$

Här motsvarar t.ex. x_C ett värde (antingen $+1$ eller -1) beroende på om mängden av vätska C är på låg eller hög nivå.

(a) Givet formeln i Ekvation (1), beskriv vilka effekter som kan existera (alltså vilka effekter som vi vet inte bara är noll).

(b) För att ta reda på effekternas storlek så utförde alkemisten ett reducerat faktorförsök med två nivåer, 2^{3-1}, såsom i tabell 1.

Man kan tänka sig faktorförsöket som ett vanligt 2^2-faktorförsök för faktorerna A och C där man sedan lagt till faktor B så att den alltid har samma nivå ($+1$ eller -1) som A i varje mätning. Vilken generator och upplösning för den reducerade försöksplanen ger detta?

(c) Skriv upp sammanblandningsmönstret (alltså vilka effekter som är varandras alias)

Nr.	A	B	C	y	s^2
1	$+$	$+$	$+$	$[15.16, 17.71]$	3.26
2	-	-	$+$	$[3.38, 1.40]$	1.98
3	$+$	$+$	-	$[10.75, 11.53]$	0.31
4	-	-	-	$[18.07, 17.37]$	0.24

Tabell 1: Faktorförsök med 2 replikat i varje mätgrupp.

(d) Med hjälp av din kunskap om vilka effekter som existerar, skatta effekterna A, C och BC samt medelvärdet M.

8. (3+2 poäng) I en fabrik finns 3 oberoende maskiner. Varje maskin har felintensitet $0.02h^{-1}$ (dvs tiden det tar tills maskinen går sönder är exponentialfördelad med parameter $0.02h^{-1}$). Det finns tre reparatörer som arbetar med reparationsintensitet $0.04h^{-1}$ (dvs tiden det tar att laga en trasig maskin är exponentialfördelad med parameter $0.04h^{-1}$). De maskiner som är hela arbetar samtidigt. Så fort en maskin går sönder börjar den repareras av en reparatör ifall det finns en ledig. En reparatör kan bara jobba på en maskin samtidigt, och varje maskin kan bara repareras av en reparatör samtidigt. Låt $X(t)$ beteckna antalet trasiga maskiner vid tiden t. Detta är en Markovkedja i kontinuerlig tid.

   (a) Beräkna Markovkedjans stationära fördelning.

   (b) Antag att vid tidpunkten 0 så är två maskiner trasiga. Vad är sannolikheten att det finns exakt två trasiga maskiner under hela tidsintervallet $[0, 2]$?

9. (2+2+3 poäng) Antag att $X(n)$, $n \geq 0$, är en Markovkedja i diskret tid. Tillståndsrummet är $\{1, 2, 3\}$. Övergångsmekanismen kan beskrivas enligt följande: Om man är i tillstånd 1 så går man i nästa steg till tillstånd 2 med sannolikhet 1/4, till tillstånd 3 med sannolikhet 1/4 samt stannar kvar med sannolikhet 1/2. Om man är i tillstånd 2 så går man i nästa steg till tillstånd 1 med sannolikhet 1. Om man är i tillstånd 3 så går man i nästa steg till tillstånd 2 med sannolikhet 1/2 och till tillstånd 1 med sannolikhet 1/2. Antag att vi startar i tillstånd 1.

   (a) Beräkna matrisen $P^{(2)}$ som innehåller tvåstegs-övergångssannolikheterna.

   (b) Beräkna väntevärdet av $X(2)$.

   (c) Beräkna (ungefär) väntevärdet av $X(n)$ ifall n väldigt stort.

Lycka till!