Lösningsförslag till Tillämpad matematisk statistik LMA201 (Elektros kurs) Tentamen 20180313

Betygsgränser: för betyg 3 krävs minst 20 poäng, för betyg 4 krävs minst 30 poäng, för betyg 5 krävs minst 40 poäng.

1. Vid en kvalitetskontroll av $N = 1500$ kanttrådsdäck undersöktes $n = 100$. Antal felaktiga däck bland de 1500 däcken var 35, så att $p = \dfrac{35}{1500}\ldots$ Sätt $x = 3$

   (a) Använd hypergeometrisk fördelning. Ett exakt uttryck för sannolikheten att exakt 3 av de 100 utvalda däcken är felaktiga är

   $$\frac{\binom{Np}{x}\binom{N(1-p)}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{35}{3}\binom{1465}{97}}{\binom{1500}{100}}$$

   3p

   (b) Sannolikheten i (a) approximativt med lämplig binomialfördelning är ($n/N = 100/1500 < 0.1$)

   $$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} = \binom{100}{3}p^3(1-p)^{97} = 0.207988\ldots$$

   Svar: Sökt sannolikhet är 0.21. 3p

2. Följande funktion $f(x)$ är en frekvensfunktion för en stokastisk variabel ξ.

   $$f(x) = \begin{cases} C\,x^3(1-x), & \text{om } 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{för övrigt} \end{cases}$$

   är given.

   (a) Konstanten C:

   $$1 = C\int_0^1 (x^3 - x^4)dx = C\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = C \cdot \frac{1}{20}.$$

   Svar: $C = 20$. 2p

   (b) Väntervärdet

   $$E(\xi) = 20\int_0^1 (x^4 - x^5)dx = 20\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}\right]_0^1 = 20 \cdot \frac{1}{30} = \frac{2}{3}.$$

   2p

3. Givet är fem oberoende mätningar som gav värdena 6.5, 6.3, 4.2, 5.5, 6.0 av en normalfördelad stokastisk variabel. Medelvärdet är $\overline{x} = 5.7$. Ett (symmetriskt) 95%:s konfidensintervall för μ

   (a) om $\sigma = 0.9$

   $$[\overline{x} - \lambda_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}] + \lambda_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}] = [5.7 - 1.96 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{5}}, 5.7 + 1.96 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{5}}] = [4.9.6.5].$$

   2p

   (b) om σ okänd ersätts σ med $s = 0.919239$ och $\lambda_{\alpha/2}$ ersätts av $t_{\alpha/2}(4) = 2.78$.

   $$[\overline{x} - t_{\alpha/2}(4)\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x}] + {}_{\alpha/2}(4)\frac{s}{\sqrt{n}}] = [5.7 - 2.78 \cdot \frac{0.919\ldots}{\sqrt{5}}, 5.7 + 2.78 \cdot \frac{0.919\ldots}{\sqrt{5}}] = [4.5.6.9].$$

   4p

4. Givet är

$$P(K) = 0.50, \quad P(K|W^c) = 0.20, \quad P(W|K) = 0.90$$

(a) Beräkna sannolikheten att ett däck är korrekt ochr av märket W...

$$P(W \cap K) = P(W|K) \cdot P(K) = 0.45.$$

2p

(b) Beräkna sannolikheten $P(K|W)$...

$$P(K|W) = \frac{P(K \cap W)}{P(W)}$$

Täljaren är beräknad i (a) och är 0.45. Vi måste beräkna $P(W)$. Enligt Bayes sats är

$$P(K|W^c) = \frac{P(W^c|K)P(K)}{P(W^c)}.$$

Eftersom $P(W^c|K) = 1 - P(W|K) = 0.1$ får vi att

$$0.2 = \frac{0.1 \cdot 0.5}{P(W^c)},$$

vilket get att $P(W^c) = 0.25$ så att $P(W) = 0.75$. Slutligen fås att $P(K|W) = 0.45/0.75 = 0.6$. 5p

5. En registreringsskylt har sex tecken , först tre bokstäver (valda bland 23) och sedan tre siffror (valda bland 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9).

(a) Antal registreringsnummer:

$$23^3 \cdot 10^3 = 1\,2167\,000.$$

1p

(b) Hur många registreringsnummer har minst två lika tecken (d.v.s minst två lika bokstäver eller minst två lika siffror? Komplementhändelsen är att alla bokstäver olika och alla siffror olika. Detta antal är

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = 7650720.$$

Sökt antal är

$$1\,2167\,000 - 7650720 = 4\,516\,280 (\approx 4.5 \cdot 10^6).$$

3p

(c) Hur många registreringsnummer har minst två lika tecken (d.v.s minst två lika bokstäver och minst två lika siffror?

$$(23^3 - 23 \cdot 22 \cdot 21)(10^3 - 10 \cdot 9 \cdot 8) = 431\,480$$

3p

6. (6 poäng)

(a) Övergångsmatrisen ges av

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Om vi betecknar stationära fördelningen med $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ så får vi genom att lösa matrisekvationen $\pi P = \pi$ under villkoret att $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ att $\pi = (2/5, 2/5, 1/5)$.

(b) Väntevärdet om n väldigt stort blir

$$E(X(n)) \approx 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} = 1.8$$

Dessutom får vi

$$E(X(n)^2) \approx 1 \cdot \frac{2}{5} + 4 \cdot \frac{2}{5} + 9 \cdot \frac{1}{5} = 3.8.$$

Så standardavvikelsen

$$\sigma \approx \sqrt{3.8 - 1.8^2} \approx 0.75$$

7. (6 poäng)

(a) Beteckna stationära fördelningen med $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$. Det gäller att

$$\pi_1 = \frac{0.02}{0.05}\pi_0 = \frac{2}{5}\pi_0$$

och

$$\pi_2 = \frac{0.02 \cdot 0.01}{0.05 \cdot 0.1}\pi_0 = \frac{1}{25}\pi_0.$$

Detta tillsammans med sambandet $\pi_0+\pi_1+\pi_2 = 1$ ger att $\pi = (25/36, 10/36, 1/36)$.

(b) Låt η_1 vara tiden det tar för reparatören att laga maskinen. Låt η_2 vara tiden till den andra maskinen går sönder.

$$P(\text{inget hopp första timmen}) = P(\eta_1 \geq 1)P(\eta_2 \geq 1).$$

Vi har att

$$P(\eta_1 \geq 1) = \int_1^\infty 0.05e^{-0.05x}dx = e^{-0.05}$$

och att

$$P(\eta_2 \geq 1) = \int_1^\infty 0.1e^{-0.1x}dx = e^{-0.1}.$$

Så $P(\text{inget hopp första timmen}) = e^{-0.15} \approx 0.86$.

8. (8 poäng)

(a) Så de tre kolumnerna måste tillsammans ge alla möjliga kombinationer av faktorerna A,B och C på låg resp. hög nivå på endast 8 rader. Detta kan vi åstadkomma genom att t.ex. sätta dem såsom i tabell 1.

(b) Trefaktorsamspelet kan räknas ut genom att för varje rad i de andra kolumnerna multiplicera dem med varandra (Tänk på att + egentligen betyder +1 och - egentligen betyder -1). Alltså blir första raden $(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -1$. Det blir alltså ett + på första raden av ABC. Fortsätter man vidare får man kolumnen ABC i tabell 1.

(c) Vi vill alltså konstruera en 2^{4-1}-plan. Nu gäller det att välja generatorn på ett smart sätt så att inga huvudeffekter får ett alias som också är en huvudeffekt eller tvåfaktor-samspelseffekt.

Eftersom vi bara reducerar en nivå så kommer vi bara ha en definierande relation. Vi ser nu att om ordet i den definierande relationen har 4 bokstäver så kommer huvudeffekter att sammanblandas antingen med trefaktor-samspel eller fyrafaktor-samspel. Detta beror ju på att en bokstav multiplicerat med fyra bokstäver inte kan ta bort mer än maximalt en av bokstäverna. Därför väljer vi generatorn $D = ABC$ som ger oss $I = ABCD$.

(d) Upplösningen blir IV eftersom vi har fyra bokstäver i ordet i vår definierande relation.

(e) Aliasen till huvudeffekterna hittar vi genom att multiplicera dem med ordet i den definierande relationen. T.ex. så blir aliaset till A $A \cdot ABCD = BCD$. De resterande sammanblandningsmönstren hittar du i tabell 2.

A	B	C	ABC
-	-	-	-
+	-	-	+
-	+	-	+
+	+	-	-
-	-	+	+
+	-	+	-
-	+	+	-
+	+	+	+

Tabell 1

Effekt	Effekt $\cdot I$	Alias
A	$A = A \cdot ABCD$	BCD
B	$B = B \cdot ABCD$	ACD
C	$C = C \cdot ABCD$	ABD
D	$D = D \cdot ABCD$	ABC

Tabell 2: Sammanblandningsmönster för huvudeffekter.