Lösningsförslag till tentamen 20190610 14.00-18.00, LMA201

1.

$$E(\xi) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 6x^2(1-x)dx = \ldots = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

$$E(\xi^2) = \int_0^1 x^2 f(x)dx = \int_0^1 6x^3(1-x)dx = \ldots = \frac{3}{10}. \tag{2}$$

$$\sigma = \sqrt{E(\xi^2) - E(\xi)^2} = \sqrt{3/10 - 1/4} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \approx 0.22. \tag{3}$$

3p

2. Bilar av ett visst märke råkar ut för fel $P(A) = 0.15$ och fel $P(B) = 0.12$ oberoende av varandra. Beräkna följande sannolikheter...
$P(A \cap B) = \{\text{ober.}\} = P(A) \cdot P(B) = 0.018$.

   (a) Sannolikheten för minst ett fel är $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.15 + 0.12 - 0.018 = 0.252$.

   (b) Sannolikheten för inget fel är $P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 0.748$.

   (c) Sannolikheten för exakt ett fel är $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0.234$.

   (d) $P(A|B) = P(A) = 0.15$ p.g.a. oberonde.

4p

Tiden för ny asfaltsläggning av Götaälvbron beräknas ta tiden $\xi \in \mathrm{N}(3.0, 0.42)$ veckor och tiden för att måla väglinjer beräknas ta tiden $\zeta \in \mathrm{N}(1.0, 0.40)$ veckor. Dessa två tidsåtgångar är oberoende varandra.

3. (a) Sannolikheten att asfaltsläggningen tar högst 3.5 veckor är $\Phi\left(\frac{3.5-3.0}{042}\right) = \Phi(1.19) = 0.88$. 2p

   (b) $\xi + \zeta \in \mathrm{N}(4.0, 0.58)$. Sannolikheten att den totala tiden, d.v.s. tiden för asfaltläggning och vägmålning, tar minst 4.5 veckor är

$$1 - \Phi\left(\frac{4.5-4.0}{0.58}\right) 1 - \Phi(0.86) = 0.19$$

3p

4. Antal inkommande paket till en postterminal per dag är Poissonfördelat $\mathrm{Po}(\lambda)$ med väntevärdet $\lambda = 30.0$. Använd lämpliga approximationer nedan.

   (a) Sannolikheten att det under en dag kommer in exakt 30 paket är

$$P(\xi = 30) = \frac{e^{-30} \cdot 30^{30}}{30!} = 0.073.$$

1p

   (b) Sannolikheten att det under en dag kommer in fler än 30 paket är, med normalfördelning, approximativt

$$P(\xi \geq 30.0) = 1 - \Phi\left(\frac{30-30}{\sqrt{30}}\right) = 0.5.$$

(Utan approximation 0.451648....) 2p

(c) Sannolikheten att det under en dag har kommit högst 40 paket givet att det har kommit minst 30 paket är

$$p = \frac{P(30 \leq \xi < 40)}{P(\xi \geq 30)} = \frac{\Phi\left(\frac{40.0}{\sqrt{30}}\right) - 0.5}{0.5} = 0.93$$

3p

Räknehjälp: Medelvärdet är 34.5 och standardavvikelsen är 1.5.

5. (a) För ett tvåsidigt 95%:s konfidensintervall för väntevärdet μ behövs kvantilen $t_{0.025,4} = 2.78$.

$$\left[34.5 - \frac{1.5 \cdot 2.78}{\sqrt{5}}, 34.5 + \frac{1.5 \cdot 2.78}{\sqrt{5}}\right] = [32.6,\ 36.4].$$

2p

(b) För ett uppåt begränsat 95%:s konfidensintervall för standardavvikelsen σ med $5 - 1 = 4$ frihetsgrader, behövs kvantilen $\chi^2_{0.05,4} = 0.71$. Intervallet är

$$\left[0, \sqrt{\frac{(5-1)}{\chi^2_{0.05,4}}} \cdot 1.5\right] = [0, 3.6\,]$$ 4p

6. (a) Beräkna...

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B|A)} = \frac{0.4}{0.8} = 0.5.$$

(b) Beräkna...

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{P(A \cap B^c)}{P(A|B^c)} = 1 - \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A|B^c)} = 1 - \frac{0.5 - 0.4}{0.25} = 0.6.$$

(c) För en tredje händelse C gäller att $P(A^c|C) = P(C|A^c)$. Beräkna $P(C)$:

$$\begin{cases} P(C|A^c) = \dfrac{P(C \cap A^c)}{P(A^c)} \\ \\ P(A^c|C) = \dfrac{P(C \cap A^c)}{P(C)} \end{cases} \implies 1 = \frac{P(C)}{1 - P(A)} \iff P(C) = 1 - P(A) = 0.5\,.$$

(d) Är A och C oberoende? Argumentering:

$$P(A \cap C^c) = 0.16 \text{ och } P(C^c) \cdot P(A) = 0.25$$

alltså beroende.

7. (2 + 2 + 2 + 2 poäng)

En mystisk alkemist har sitt laboratorium uppe i ett mörkt tornrum i ett slott på den skotska landsbygden. Där uppe har hon upptäckt formeln för att göra guld av gamla petflaskor och cigarettfimpar.

I hennes formel är renheten guld responsvariabeln, Y (som mäts i karat). Y kan anses approximativt normalfördelad med varians σ^2 och ett väntevärde som beror på faktorernas nivåer. Faktorerna är mängden petflaskor (A), mängden cigarettfimpar (B) samt mängden av en hemlig vätska (C). Formeln för väntevärdet av responsvariablen givet faktorernas inställningar ges av

$$\beta_0 + \beta_A x_A + \beta_C x_C + \beta_{BC} x_B x_C. \qquad (4)$$

Här motsvarar t.ex. x_c ett värde (antingen $+1$ eller -1) beroende på om mängden av vätska C är på låg eller hög nivå.

(a) Givet formeln i Ekvation (4), beskriv vilka effekter som kan existera (alltså vilka effekter som vi vet inte bara är noll).

Lösning

De existerande effekterna är A, C och BC.

(b) För att ta reda på effekternas storlek så utförde alkemisten ett reducerat faktorförsök med två nivåer, 2^{3-1}, såsom i tabell 1.

Man kan tänka sig faktorförsöket som ett vanligt 2^2-faktorförsök för faktorerna A och C där man sedan lagt till faktor B så att den alltid har samma nivå ($+1$ eller -1) som A i varje mätning. Vilken generator och upplösning för den reducerade försöksplanen ger detta?

Nr.	A	B	C	y	s^2
1	+	+	+	$[15.16, 17.71]$	3.26
2	-	-	+	$[3.38, 1.40]$	1.98
3	+	+	-	$[10.75, 11.53]$	0.31
4	-	-	-	$[18.07, 17.37]$	0.24

Table 1: Faktorförsök med 2 replikat i varje mätgrupp.

Lösning

Generatorn $A = B$. Detta ger order $I = AB$ och därför upplösningen II, alltså en 2^{3-1}_{II}-plan.

(c) Skriv upp sammanblandningsmönstret (alltså vilka effekter som är varandras alias)

Lösning

Ordet är $I = AB$. Multiplicerar vi en effekt med ordet får vi dess alias. Detta ger sammanblandningsmönstret som i tabell 2.

M	AB
A	B
C	ABC
AC	BC

Table 2: Sammanblandningsmönster. Raderna motsvarar olika grupper av beblandade effekter. Kolumnerna motsvarar effekter som är alias till varandra.

(d) Med hjälp av din kunskap om vilka effekter som existerar, skatta effekterna A, C och BC samt medelvärdet M.

Lösning

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{15.16+17.71+18.07+17.37+3.38+1.40+10.75+11.53}{8} = 11.92 \\
l_A &= \frac{15.16+17.71+10.75+11.53}{4} - \frac{3.38+1.40+18.07+17.37}{4} = 3.73 \\
l_C &= \frac{15.16+17.71+3.38+1.40}{4} - \frac{10.75+11.53+18.07+17.37}{4} = -5.02 \\
l_{BC} &= \frac{15.16+17.71+18.07+17.37}{4} - \frac{3.38+1.40+10.75+11.53}{4} = 10.31.
\end{aligned}
$$

8. (a) Beteckna stationära fördelningen med $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$. Det gäller att

$$\pi_1 = \frac{0.06}{0.04}\pi_0 = \frac{3}{2}\pi_0. \tag{5}$$

$$\pi_2 = \frac{0.06 \times 0.04}{0.04 \times 0.08}\pi_0 = \frac{3}{4}\pi_0. \tag{6}$$

$$\pi_3 = \frac{0.06 \times 0.04 \times 0.02}{0.04 \times 0.08 \times 0.12}\pi_0 = \frac{1}{8}\pi_0. \tag{7}$$

Eftersom

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \tag{8}$$

fås att

$$\pi_0(1 + 3/2 + 3/4 + 1/8) = \frac{27}{8}\pi_0 = 1, \tag{9}$$

vilket ger $\pi_0 = 8/27$. Insättning i ekvationerna ovan ger till slut att

$$\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) = (8/27, 12/27, 6/27, 1/27). \tag{10}$$

(b) Om vi är i tillståndet med två trasiga maskiner är tiden tills vi hoppas till något annat tillstånd exponentialfördelad med parameter $0.08 + 0.02 = 0.1$. Beteckna denna tid med T. Vi får att sannolikheten att det finns exakt två trasiga maskiner under hela tidsintervallet $[0, 2]$ ges av

$$P(T \geq 2) = \int_2^\infty 0.1e^{-0.1x}dx = e^{-0.2} \approx 0.82. \tag{11}$$

9. (a) Övergångsmatrisen ges av

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Därför blir

$$P^{(2)} = P^2 = \ldots = \begin{pmatrix} 5/8 & 2/8 & 1/8 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 6/8 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix}$$

(b) Vi har att startvektorn $p^{(0)} = (1, 0, 0)$. Tillståndsvektorn vid tidpunkt 2 ges därför av

$$p^{(2)} = p^{(0)}P^{(2)} = \ldots = (5/8, 2/8, 1/8).$$

Därför blir

$$E(X(2)) = 1 \times 5/8 + 2 \times 2/8 + 3 \times 1/8 = 3/2.$$

(c) Beteckna den stationära fördelningen med $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ där $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Man får fram π genom att lösa

$$\pi P = \pi.$$

Om man utför matrismultiplikationen ovan får man de tre ekvationerna $\pi_1 = \pi_1/2 + \pi_2 + \pi_3/2$, $\pi_2 = \pi_1/4 + \pi_3/2$ och $\pi_3 = \pi_1/4$. Vi får till slut att $\pi = (8/13, 3/13, 2/13)$. Om n är stort blir alltså

$$E(X(2)) \approx 1 \times 8/13 + 2 \times 3/13 + 3 \times 2/13 = 20/13.$$