Lösningsförslag LMA201, LMA521, LMA522, LKT325, 20190829, 08.30-12.30
OBS: de sju första uppgifterna är samma, men de två sista är olika för de olika kurserna

1. (a)

$$E(\xi) = \int_0^1 4x^2(1-x^2)dx = \ldots = \frac{8}{15}.$$
$$E(\xi^2) = \int_0^1 4x^3(1-x^2)dx = \ldots = \frac{1}{3}.$$
$$\sigma = \sqrt{1/3 - (8/15)^2} = \frac{\sqrt{11}}{15} \approx 0.22.$$

(b)

$$P(\xi \geq 1/4 \,|\, \xi \leq 3/4) = \frac{P(1/4 \leq \xi \leq 3/4)}{P(\xi \leq 3/4)} = \frac{\int_{1/4}^{3/4} 4x(1-x^2)dx}{\int_0^{3/4} 4x(1-x^2)dx} = \frac{11/16}{207/256} = \frac{176}{207} \approx 0.85.$$

2. För två händelser A och B gäller att $P(A \cap B) = 1/3$, $P(A \cap B^c) = 1/6$ och $P(B) = 5/6$. Beräkna

(a)

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

2p

(b)

$$P(B^c|A) = \frac{P(B^c \cap A)}{P(A)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

2p

(c)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/3}{5/6} = \frac{2}{5}.$$

2p

3. Man utgår från att brottsgränsen är normalfördelad.

(a) $t_{4.0.01} = 3.8$Ett 98 % symmetriskt konfidensintervall för fördelningens väntevärde:

$[\overline{x} - t_{4,0.01}s\sqrt{5}, \overline{x} + t_{4,0.01}s/\sqrt{5}] = [100.0 - 3.8 \cdot 4.0/\sqrt{5}, 100.0 + 3.8 \cdot 4.0/\sqrt{5}] = [103, 117]$

2p

(b) Eftersom vi inte kan konstruera ett 98% konfidensintervall med hjälp av tabellen så gör vi ett ett uppåt begränsat 97.5 % istället. Vi har att $\chi^2_{4,0.975} = 0.48$ så intervallet är

$$\left[0, \sqrt{\frac{4 \cdot 4.0^2}{0.48}}\right] = [0, 11.5]$$

3p

4. (a) Väntevärde och standardavvikelse för antal p-platser i FF: hyreshus.

$$\mu = 0.8 \cdot 225 = 180, \text{ och } \sigma = \sqrt{225 \cdot 0.8 \cdot 0.2} = 6.0.$$

2p

(b) Fastighetsföretaget planerar att göra 190 p-platser. Vad är sannolikheten att dessa räcker för de 225 lägenheterna? Låt ξ vara antal bilar. Då är $\xi \in \mathrm{N}(180, 6)$ approximativt.

$$P(\xi < 190) = \Phi\left(\frac{190 - 180}{6}\right) = \Phi(1.67) = 0.95$$

3p

(c) Man söker x, antal p-platser sådant att

$$P(\xi < x) = 0.99 \text{ d.v.s. } \frac{x - \mu}{\sigma} = \{\text{tabell}\} = 2.33 \Longleftrightarrow x = 6 \cdot 2.33 + 180 = 194 \text{ p-platser.}$$

2p

5. För att hyrsesgästerna skall komma in i respektive lägenhet i Fastighetsföretaget Femfemmans hyreshus (FF), används fyrsiffriga koder, där alla fyra siffror är olika.

(a) Antal koder är $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$. 2p

(b) Det finns 10 olika siffror som kan vara dubbla. Det finns $\binom{5}{2}$ sätt att välja två positioner att placera ut dessa. Sedan finns det $9 \cdot 8 \cdot 7$ sätt att placera ut tre andra siffror som alla är olika. Så enligt multiplikationsprincipen blir det totala antalet koder där exakt två siffror är olika lika med

$$10 \cdot \binom{5}{2} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 50400.$$

4p

6. Ada och Beda spelar med en tärning med sex sidor. De kastar varannan gång och Ada börjar. Händelsen att ada vinner sätter vi till A så att händelsen att Beda vinner är A^c. Låt B vara händelsen att Ada ej får en sexa på första kastet. Nu är $P(B) = 5/6$ och $P(A^c|B) = P(A)$ eftersom Beda. p.g.a. att Ada int får en en sexa befinner sig i samma situation som Ada *innnan* första kastet. Vi får att

$$p := P(A) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = P(B|A^c) \cdot \frac{P(A^c)}{P(B)} = 1 \cdot \frac{1-p}{5/6}.$$

Vi får sambandet

$$5p = 6(1-p) \Longleftrightarrow p = P(A) = \frac{6}{11}.$$

som är sannolikheten att Ada vinner. 6p

7. (a)

$$l_A = \frac{0.9 + 1 + 1.4 + 1 - 1.2 - 1.5 - 1.1 - 0.8}{4} = -0.075.$$

$$l_{BC} = \frac{1.2 + 1.5 + 1.4 + 1 - 0.9 - 1 - 1.1 - 0.8}{4} = 0.325.$$

(b) $D = AC$ ger att $C = AD$. Så AD är alias till C.

(c) Till exempel innebär faktumet att AD är alias till C att när man försöker beräkna l_C på sedvanligt sätt från det reducerade försöket att man får $l_C + l_{AD}$ istället för l_C.

8, LMA521 och LMA522 (a) Avläsning i nomogram ger att $n = 90$ och $c = 7$ ($c = 6$ går också bra). I ord: ta ett urval på 90 enheter. Ifall färre än eller lika med 7 defekta så accepteras partiet, annars avvisas det.

(b) Vi har $p_1/p_2 = 0.12/0.04 = 3$. Provplan nr 10 i tabellen för $n_2 = 2n_1$ ger att lämpliga val på c_1 och c_2 är $c_1 = 3$ och $c_2 = 10$. Rad 10, kolumn 0.95 ger att $n_1p_1 = 2.27$ vilket ger $n_1 = 2.27/0.04 \approx 56.75$. Genom att titta på rad 10, kolumn 0.1 istället får man $n_1 = 56$. Således blir det lämpligt att välja $n_1 = 56$ eller 57 och $n_2 = 112$ eller 114. I ord: I urval 1 testas 56 enheter. Om färre än eller lika med 3 av dessa är defekta så accepteras partiet. Ifall fler än eller lika med 11 av dessa är defekta så avvisas partiet. Annars går man till urval 2. Ifall totala antalet defekta i urval 1 och 2 är mindre än eller lika med 10 såaccepteras partiet, annars avvisas det.

8, LMA201 (a) Beteckna stationära fördelningen med $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$. Den uppfyller $\pi P = \pi$. Genom att utföra matrismultiplikation ser vi att $\pi P = \pi$ är ekvivalent med de tre ekvationerna

$$\pi_1 = \pi_1/2 + \pi_2/2 + \pi_3/2$$

$$\pi_2 = \pi_1/2 + \pi_3/2$$

$$\pi_3 = \pi_2/2.$$

Dessutom vet vi att $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Genom att använda dessa ekvationer får man att

$$\pi = (1/2, 1/3, 1/6).$$

(b)

$$p^{(1)} = p^{(0)}P = \ldots = (1/2, 0, 1/2).$$

8, LKT325 Den färdiga ANOVA-tabellen bör se ut så här:

Variationskälla	SS	*df*	MS	F
Mellan grupper	0.52532	3	0.175108	8.734
Inom grupper	0.24059	12	0.020049	
Totalt	0.76591	15		

Vi använder de fem stegen.

Steg 1. Låt μ_1, μ_2, μ_3 och μ_4 beteckna de genomsnittliga livslängderna för de tre modellerna. Våra hypoteser blir $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ och $H_1 : \exists i, j : \mu_i \neq \mu_j$.

Steg 2. Vi väljer signifikansnivå $\alpha = 0.05$. (Man är fri att välja signifikansnivå men det är bara 0.05 som finns i tabellen så om man väljer någon annan nivå får man problem.)

Steg 3. Testvariabeln vi vill använda är

$$F = \frac{MSB}{MSE} = \frac{(SSB)/(k-1)}{(SSE)/(n-k)}$$

som är F-fördelad med 3 och 12 frihetsgrader.

Steg 4. Vi vill ta fram vårt observerade värde på F. För att göra det så fyller vi i ANOVA-tabellen succesivt. Vi vet att $SST = SSB + SSE$ så vi vet att $SSE = .76591 - .52532 = .24059$. Eftersom det är fyra grupper och fyra observationer i varje grupp blir frihetsgraderna 3 och 12. Vi vet också att $MSB = SSB/df = .175108$ och att $MSE = SSE/df = .020049$. Tillslut får vi att $F = MSB/MSE = 8.734$.

Steg 5. Vi tittar i F-fördelningstabellen med 3 och 12 frihetsgrader och ser att det kritiska värdet är 3.49. Eftersom vårt observerade vä rde är större än det kritiska värdet så förkastar vi H_0 på signifikansnivå $\alpha = 0.05$.

Slutsats: Kaffet i de fyra kafeerna har i genomsnitt olika pH-värden.

9, LMA521, LMA522 Vi får att $\bar{\bar{x}} = 6.94$ och $\bar{R} = 0.29$. Tabell ger $A_2 = 0.577$, $D_3 = 0$ och $D_4 = 2.115$. Således blir $\bar{x}$-diagrammets gränser

$$\bar{\bar{x}} \pm A_2\bar{R} = 6.94 \pm 0.577 \cdot 0.29 = [6.77, 7.11],$$

och R-diagrammets gränser blir $D_3\bar{R} = 0$ samt $D_4\bar{R} = 2.115 \cdot 0.29 = 0.61$. Vi ser att det finns $\bar{x}$ värden som ligger utanför gränserna för $\bar{x}$-diagrammet. Således är processen ej i statistisk kontroll.

9, LMA201 (a) Låt $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$ beteckna den stationära fördelningen. Det gäller att

$$\pi_1 = \frac{0.02}{0.1}\pi_0 = \frac{1}{5}\pi_0,$$

$$\pi_2 = \frac{0.02 \cdot 0.01}{0.1 \cdot 0.1}\pi_0 = \frac{1}{50}\pi_0,$$

och

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1.$$

Vi får att detta ger $\pi = (50/61, 10/61, 1/61)$.

(b) Här är det π_0 som efterfrågas, dvs sökt sannolikhet är 50/61.

9, LKT325 Låt μ beteckna den genomsnittliga vikten i tillverkarens chipspåsar.

Steg 1 Eftersom du vill påvisa att den genomsnittliga vikten är mindre än 200 gram så vill vi utföra ett ensidigt test. Hypoteserna blir alltså: $H_0 : \mu = 200$ och $H_1 : \mu < 200$.

Steg 2 Signifikansnivån var bestämd till $\alpha = 0.05$.

Steg 3 Vi får givet att vikten i chipspåsarna kan anses vara normalfördelade. Testvariabeln vi vill använda ‰r alltså

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

som är $N(0, 1)$-fördelad.

Steg 4 I vårt fall är $\bar{x} = 196$, $\mu_0 = 200$, $\sigma = 13$ och $n = 14$. Vår observerade teststatistika blir då, -1.15.

Steg 5 Det kritiska värdet tas fram genom att titta i normalfördelningstabellen: -1.645. Eftersom vår observerade teststatistika är större (närmre 0) än det kritiska värdet så kan vi inte förkasta H_0 på signifkansnivå $\alpha = 0.05$.

Slutsats: Vi kan inte utesluta att tilllverkarens påstående stämmer.