Lösningar till tentamen i Matematisk statistik och diskret matematik, MVE055, MSN620
11 januari 2006

1. X, Y oberoende, $E[X] = 5$, Var $X = 3$, $E[Y] = 13$, Var $Y = 7$
   (a) $E[X - Y + 3] = E[X] - E[Y] + E[3] = 5 - 13 + 3 = -5$
   Var $[X - Y + 3] =$ Var $X +$ Var $Y +$ Var $3 = 3 + 7 + 0 = 10$
   (b) $E[5X + Y/4] = 5E[X] + E[Y]/4 = 5 \cdot 5 + 13/4 = 87/4 = 28.25$
   Var $[5X - Y/4] = 5^2$Var $X +$ Var $Y/4^2 = 25 \cdot 3 + 7/16 = 75.4375$
   $\sigma = \sqrt{75.4375} \approx 8.69$
   (c) $E[X(3 + 2Y)] = E[3X + 2XY] = 3E[X] + 2E[X]E[Y] = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot 13 = 145$

2. A, B händelser, P(A)=0.2, P(B)=0.15. Vi använder $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$:
   (a) A, B disjunkta, dvs $P(A \cap B) = 0$, ger $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.35$
   (b) A, B oberoende, dvs $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, ger
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.32$
   (c) $B \subseteq A$, dvs $P(A \cap B) = P(B)$, ger $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(B) = 0.2$

3. X=”antal personer av 100 som ej bär mössa”. Tillräckligt många för normalapproximation:
   $X \sim Bin(100, p) \overset{appr}{\sim} Norm(100p, \sqrt{p(1-p)100}) \overset{appr}{\sim} Norm(100p, \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})100})$, där
   $\hat{p} = \frac{35}{100} = 0.35$ är punktskattningen för p. Standardnormalfördelningen ger nu

$$P\left[\frac{|X - 100p|}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})100}} \leq z_{0.025}\right] \approx 0.95 \Leftrightarrow P\left[\left|\frac{X}{100} - p\right| \leq z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{100}}\right] \approx 0.95$$

   Med $z_{0.025} \approx 1.96$ ur tabell fås det 95%-iga konfidensintervallet som

$$p = \frac{x}{100} \pm z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{100}} \approx 0.35 \pm 0..093$$

4.

5. X=”Tid för nya spisen”, $X \sim Norm(\mu_X, \sigma)$ med stickprov: $n_X = 30, \bar{x} = 3.9, s_X^2 = 1.2$
   Y=”Tid för gamla spisen”, $Y \sim Norm(\mu_Y, \sigma)$ med stickprov: $n_Y = 25, \bar{y} = 4.6, s_Y^2 = 1.3$
   Vi vill testa
   $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ mot $H_1 : \mu_x < \mu_y$.

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim Norm(\mu_X - \mu_Y, \sqrt{\frac{\sigma^2}{30} + \frac{\sigma^2}{25}})$$

   Vi skattar σ med den sammanvägda variansen $s_p^2 = \frac{30s_x^2 + 25s_Y^2}{30+25} \approx 1.245$.

   Teststatistika: $T = (\bar{X} - \bar{Y})/\sqrt{S_p^2(1/30 + 1/25)}$ approx T_{53} -fördelad.

   Observerat värde: $T = (4.6 - 3.9)/\sqrt{1.245(1/30 + 1/25)} \approx 2.32$.

   p-värde $= P(T \geq 2.32) \Rightarrow$ vilket med hjälp av tabell ger

   0.01 $\leq$p-värde$\leq$ 0.025. Det finns starka skäl att förkasta nollhypotesen.

6. $X_i =$ “Kalles höjd i hopp nummer i “, $i = 1, 2, 3, \ldots$

   $Y_i =$ “Annas höjd i hopp nummer i “, $i = 1, 2, 3, \ldots$

   Alla X_i och Y_i är oberoende, $X_i \sim Norm(246, 3)$ och $Y_i \sim Norm(243, 4)$

   Inför också händelserna A_i=\{Kalle når äpplet i hopp i\}=$\{X_i \geq 250\}$ och B_i=\{Anna når äpplet i hopp i\}=$\{Y_i \geq 250\}$

(a) $P[A_i] = P[X_1 \geq 250] = P\Big[\underbrace{\frac{X_1 - 246}{3}}_{\sim Norm(0,1)} \geq \frac{250-246}{3}\Big] = 1 - \Phi(4/3) \approx 1 - 0.91 \approx 0.09$

(b) $P[\text{Kalle lyckas först på fjärde försöket}] = P[A_1^C A_2^C A_3^C A_4] = 0.91^3 \cdot 0.09 \approx 0.068$

(c) $P[B_1] = P[Y_1 \geq 250] = P\Big[\underbrace{\frac{Y_1 - 243}{4}}_{\sim Norm(0,1)} \geq \frac{250-243}{4}\Big] = 1 - \Phi(7/4) \approx 1 - 0.9599 \approx 0.04$

$P[\text{Någon lyckas på 1 försök}] = P[A_1 \cup B_1] = 1 - P[A_1^C \cap B_1^C] \approx 1 - 0.91 \cdot 0.96 \approx 0.13$

7. (a) Frekvensfunktionen f_{XY} ges av

$Y \backslash X$	0	1
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	1/8	0

(b) $E[X] = \frac{1}{8}$, $E[X^2] = \frac{1}{8}$, $\text{Var } X = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{8} - (\frac{1}{8})^2 = \frac{7}{64}$
$E[Y] = \frac{3}{2}$, $E[Y^2] = 3$, $\text{Var } Y = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{3}{4}$,
$E[XY] = 0$,
$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\text{Var } X \cdot \text{Var } Y}} = \frac{E[XY]-E[X]E[Y]}{\sqrt{\text{Var } X \cdot \text{Var } Y}} = \frac{0-3/16}{\sqrt{\frac{7}{64} \cdot \frac{3}{4}}} = -\frac{3}{\sqrt{21}} \approx -.65.$

8. X="Antal fel på första 4 meterna av tyget", $X \sim Po(2)$
Y="Längd (meter) till första felet", $Y \sim Exp(0.5)$

(a) $E[Y] = \frac{1}{0.5} = 2$

(b) $P[Y \geq 4] = 1 - F_Y(4) = 1 - (1 - e^{-0.5*4}) = e^{-2} \approx 0.135$

(c) $P[X \leq 3 | X > 0] = \frac{P[X \leq 3 \cap Y < 3]}{P[X>0]} = \frac{P[1 \leq X \leq 3]}{P[X>0]} = \frac{e^{-2}(2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!})}{1-e^{-2}} \approx 0.835$

9. Tillstånd 3 är det enda absorberande.

Låt $t_1 = E[\text{antal steg tills vi når 3 om vi startar i 1}]$
och $t_2 = E[\text{antal steg tills vi når 3 om vi startar i 2}]$.

Det sökta är då t_1 som ges av ekvationssystemet

$$\begin{cases} t_1 = 1 + \frac{1}{4} t_2 \\ t_2 = 1 + \frac{1}{2} t_2 + \frac{1}{2} t_1 \end{cases} \iff \{ t_1 = 2$$

10. (a) Den genererande funktionen för a_n, $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ges av

$$A(x) = (x^3 + x^4 + x^5 \dots)^4 = \left(\frac{x^3}{1-x}\right)^4$$
$$= \frac{x^{12}}{(1-x)^4} = x^{12} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} x^n$$

(b) Så a_{20}, dvs koefficienten framför x^{20} i $A(x)$, blir $a_{20} = \binom{8+3}{3} = 165$