Lösningar till tentamen i Matematisk statistik och diskret matematik IT2 (MVE050) och Statistik för fysiker (MSG820).
Den 19 december 2008.

1. Lösning:

   a)
   $$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.06}{0.2} = 0.3$$

   b) A och B är **ej** disjunkta, ty $P(A \cap B) \neq 0$

2. Lösning:

   a) X= antal rätt Kurt får på tentan. $X \sim \text{Bin}(20, 0.2)$. $P(X \geq 10) = \sum_{x=10}^{20} f_X(x) =$ (från Beta) $= 0.0020 + 0.0005 + 0.0001 + 0.000 + \ldots 0.000 \approx 0.0026$

   b) Y= antal försök till Kurt klarar tentan. $Y \sim \text{Geo}(0.0026)$ ger att $E[Y] = \frac{1}{0.0026} \approx 385$

   c) $P(Y \geq 3) = 1 - P(Y < 3) = 1 - (P(Y = 1) + P(Y = 2)) = 1 - (f_Y(1) + f_Y(2)) \approx 1 - (0.0270 + 0.0263) \approx 0.947$

3. Lösning:

   a) Låt S = en slumpis vald individ ur populationen har sjukdomen och U = testet ger utslag. Då är $P(S) = 0.005$, $P(U|S) = 0.98$ och $P(U|S^C) = 0.001$. Bayes formel ger:
   $$P(S|U) = \frac{P(U|S)P(S)}{P(U)} = \frac{0.98 * 0.005}{0.98 * 0.005 + 0.001 * (1 - 0.005)} \approx 0.83$$

   b) (iv) är det rätta påståendet. Från $P(U|S) = 0.98$ och $P(U|S^C) = 0.001$ följer det att X tenderar att anta "stora värden" $(X = 1)$ då Y antar "stora värden" $(Y = 1)$, d.v.s korrelationen är positiv. Korrelationen är inte 1, ty det skulle betyda at testet gav rätt svar varje gång, vilket det inte gör.

4. Lösning:

   a) $\bar{X} - \bar{Y}$ är väntevärdesriktig skattare för $\mu_X - \mu_Y$. Se egna föreläsningsanteckningar.

   b) S_p^2 har mindre varians än S_X^2, något som är eftersträvansvärt för en skattare.

5. Lösning:
   Antalet sätt ges av koefficienten framför x^{50} i följande uttryck:

$$\begin{aligned}
(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{20})^4 &= \left(\tfrac{1-x^{21}}{1-x}\right)^4 \\
&= \left(1 - x^{21})\right)^4 \left(\tfrac{1}{1-x}\right)^4 \\
&= \left(1 + 4(-x^{21}) + 6(-x^{21})^2 + 4(-x^{21})^3 + (-x^{21})^4\right) \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} \\
&= \left(1 - 4x^{21} + 6x^{42} - 4x^{63} + x^{84}\right) \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} x^n
\end{aligned}$$

Koefficienten framför x^{50} är alltså

$$\binom{50+3}{3} - 4\binom{29+3}{3} + 6\binom{8+3}{3} = 4576$$

6. Lösning:
X = tiden att koka upp 1 liter vatten. Kalle har antagit att: $X \sim \text{Norm}(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{array}{ll} H_0: & \mu = 150 \quad (\text{alt.}\mu \le 150) \\ H_1: & \mu > 150 \end{array}$$

Om H_0 är sann så gäller att teststatistikan

$$\frac{\bar{X} - 150}{S/\sqrt{4}} \sim T_3$$

Vi har att

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 99906, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = 632$$

som ger

$$s^2 = \frac{4 * 99906 - 632^2}{4 * 3} \approx 16.6667$$

och med

$$\bar{x} = 162$$

har vi att det observerade värdet på vår teststatistika är 5.88.

$$p\text{-värde} = P(T_3 \le 5.88).$$

Ur tabell i Beta kan avläsas att p-värdet är ungefär 0.005. Tolkningen av ett $p-$värde på 0.005 är att vi observerat ett värde som uppkommer 1 gång på 200 om H_0 är sann. Detta är en så extrem observation att vi förkastar H_0 till förmån för H_1.

Om vi på förhand hade valt signifikansnivå 0.01 så skulle vi kunna förkasta H_0.

7. Lösning:
För Poisson och geometrisk: Se föreläsningsanteckningar.

Om $X \sim \text{Exp}(\beta)$: Med kursens parametrisering av exponentialfördelad s.v.är $m_X(t) = \frac{1/\beta}{1/\beta - t}$. Derivering ger att $m'_X(t) = \frac{1/\beta}{(1/\beta - t)^2}$. Därmed har vi att $E[X] = m'_X(0) = \beta$. Vi har också att $m_X^{(2)}(t) = \frac{2/\beta}{(1/\beta - t)^3}$ så att $E[X^2] = m_X^{(2)}(0) = 2\beta^2$. Därmed har vi att $V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \beta^2$

8. Lösning:

a) Ett approximativt tvåsidigt 95%−igt konfidensintervall för andelen är:

$$\hat{p} \pm z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.8 \pm 1.96 * 0.0632$$

Konfidenintervallet är alltså: [0.676,0.924].

b) En approximation kommer från att man approximerar summan av Bernoullifördelade s.v. med en normalfördelning. En approximation kommer från att variansen för $\bar{X}$ som är $\frac{p(1-p)}{n}$ skattas med $\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}$

9. Lösning:

$$\begin{aligned}
1 - F_Z(z) &= P(Z > z) && (1)\\
&= P(\min\{X, Y\} > z) && (2)\\
&= P(X > z \cap Y > z) && (3)\\
&= P(X > z)P(Y > z) && (4)\\
&= \exp\{-\frac{z}{\beta}\}\exp\{-\frac{z}{\beta}\} && (5)\\
&= \exp\{-\frac{2z}{\beta}\} && (6)\\
&= \exp\{-\frac{z}{\beta/2}\} && (7)
\end{aligned}$$

Alltså gäller

$$F_Z(z) = 1 - \exp\{-\frac{z}{\beta/2}\}$$

och därmed

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \beta/2 * \exp\{-\frac{z}{\beta/2}\}$$

vilket visar att $Z \sim \text{Exp}(\beta/2)$

10. Lösning:

a) X= antal gånger det ringer under Örjans halvtimmeslånga lunch. $X \sim \text{Po}(3)$.
$\mathbf{P}(X \leq 1) = f_X(0) + f_X(1) \approx 0.0498 + 0.1494 = 0.1992$

b) Y= tiden till första ringningen efter tidpunkten t_0. $Y \sim \text{Exp}(1/6) \Rightarrow E[Y] = 1/6$ timme $= 10$ minuter.

c) Se föreläsningsanteckningar.