Vecka 3

Tvådimentionella stokastiska variabler (fortsättning), Markovkedjor och poissonprocesser

Under måndagens föreläsning pratar vi om covarians och korrelation för stokastiska variabler. Covarians och korrelation är mått på hur stokastiska variabler samvarierar. Jag kommer också att prata lite om uppgift 4e på inlämningsuppgiften om skiplistor. Observera att sista inlämningsdag har blivit flyttad till onsdag läsvecka 3. Lämna inlämningsuppgiften vid föreläsningen.

En stor del av veckan kommer att handla om markovkedjor, som är en sekvens av stokastiska variabler med en viss typ av beroende:

$X_0, X_1, X_2, \ldots$ är en markovkedja om följande villkor gäller:

$$P(X_{n+1} = x | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x | X_n = x_n).$$

Detta villkor kallas markovegenskapen. Ofta tänker man sig att man hoppar mellan olika tillstånd och att vid tid n befinner man sig i tillstånd X_n – då säger denna egenskap att "givet nuet beror vad som ska hända i framtiden bara på nuet och ej på det förflutna" ($n+1 =$ framtid, $n =$idag, $1, \ldots, n-1$=förflutet). En övergångsmatris innehåller sannolikheterna $P_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$, där i och j är möjliga tillstånd (utfall).

På grupparbetet kommer vi att undersöka sk absorberande markovkedjor, dvs kedjor där det finns ett eller flera tillstånd som är absorberande på så sätt att förr eller senare så hamnar man i ett sådant tillstånd och då kommer man aldrig därifrån.

Veckans andra föreläsning kommer huvudsakligen att handla om poissonprocesser. Sådana processer kan användas för att modellera hur en viss händelse inträffar slumpmässigt i tiden, rummet etc, med en viss intensitet. Vi går här tillbaka till kapitel 3 och 4 i boken och tar upp två fördelningar: Poissonfördelningen eftersom antalet händelser i ett intervall har en sådan fördelning och exponentialfördelningen som är den kontinuerliga fördelning som avstånden mellan händelser har. Poissonprocesser är användbara inom tex telekommunikation och köteori.

Schema

- Måndag 10 nov: 13.15, sal HC1. Föreläsning.
- Onsdag 12 nov: 8.00, sal ES51,ES52. Demonstrationsräkning, samt egen räkning.
- Onsdag 12 nov: 13.15, sal HC2. Föreläsning, samt inlämning grupparbeten.
- Fredag 14 nov: 10.00, sal MML5,MML6. Grupparbete 2 - Penney's Game.

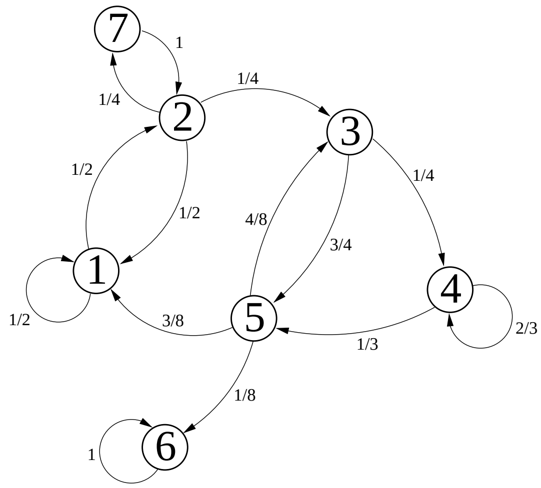
Litteratur

- Markovkedjor:
  - Kap 11.1 i Grinstead & Snell (GS): Introduction To Probability (delas ut).
  - Utdelat material om *Absorberande markovkedjor*.
- Poissonprocesser: Kap 3.8 och 4.3 (inte Gammafördelningen) i Milton & Arnold (MA).

Övningar

På demonstrationsräkningen kommer övningar att väljas bland följande:
Kap 5, MA: 5, 15, 25, 26, 29, 37
Kap 11, GS: Avsnitt 11.1: 2, 7, 11; Avsn 11.2: 1, 19a

Följande övningar rekommenderas ni att räkna på egen hand:
Kap 11, GS: Avsnitt 11.1: 3,5; Avsnitt 11.2: 3
Kap 5, MA: 1, 4, 16, 35
Kap 3.8, MA (efter onsdag): 61, 62, 64, 70
Kap 4.3, MA (efter onsdag): 34, 35, 36, 37



Figur 1: Ett exempel på en markovkedja med tillståndsrum $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Kedjan har ett s.k. absorberande tillstånd, om den vid något tillfälle hamnar i tillstånd 6 så kommer den att stanna där för alltid, dvs om för något n, $X_n = 6$, så är $X_m = 6$ för alla $m \geq n$. På varje pil finns sannolikheten för att den ska vandra just den vägen angiven.
Vi tolkar bilden på följande sätt. Om $X_0 = 1$ så är sannolikheten $1/2$ för att även $X_1 = 1$ och $1/2$ för att $X_1 = 2$. Om kedjan efter 2 steg befinner sig i tillståndet 7, dvs $X_2 = 7$, så kommer med sannolikheten 1 $X_3 = 2$. Vi kallar dessa sannolikheter för övergångssannolikheter och betecknar dom med betingade sannolikheter, exempelvis $P_{23} = P(X_{n+1} = 3|X_n = 2)$.