Lösningar till tentamen i Matematisk statistik och diskret matematik, MVE050, MSN620
16 december 2005

1. X, Y oberoende, $E[X] = 5$, Var $X = 3$, $E[Y] = 13$, Var $Y = 7$

   (a) $E[X + Y - 5] = E[X] + E[Y] - E[5] = 5 + 13 - 5 = 13$
   Var $[X + Y - 5] =$ Var $X +$ Var $Y +$ Var $5 = 3 + 7 + 0 = 10$

   (b) $E[3X - 2Y] = 3E[X] - 2E[Y] = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 13 = -11$
   Var $[3X - 2Y] = 3^2$Var $X + 2^2$Var $Y = 9 \cdot 3 + 4 \cdot 7 = 55$
   $\sigma = \sqrt{55}$

   (c) $E[X(1.5 + Y)] = E[1.5X + XY] = 1.5E[X] + E[X]E[Y] = 1.5 \cdot 5 + 5 \cdot 13 = 72.5$

2. A, B händelser, P(A)=0.35, P(B)=0.1. Vi använder $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$:

   (a) A, B disjunkta, dvs $P(A \cap B) = 0$, ger $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.45$

   (b) A, B oberoende, dvs $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, ger
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.415$

   (c) $B \subseteq A$, dvs $P(A \cap B) = P(B)$, ger $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(B) = 0.35$

3. X=”antal personer av 100 tillfrågade som ej köpt julklappar”. Tillräckligt många för normalapproximation:
   $X \sim Bin(100, p) \overset{appr}{\sim} Norm(100p, \sqrt{p(1-p)100}) \overset{appr}{\sim} Norm(100p, \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})100})$, där $\hat{p} = \frac{28}{100} = 0.28$ är punktskattningen för p. Standardnormalfördelningen ger nu

$$P\left[\frac{|X - 100p|}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})100}} \leq z_{0.005}\right] \approx 0.99 \Leftrightarrow P\left[\left|\frac{X}{100} - p\right| \leq z_{0.005}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{100}}\right] \approx 0.99$$

   Med $z_{0.005} \approx 2.575$ ur tabell fås det 99%-iga konfidensintervallet som

$$p = \frac{x}{100} \pm z_{0.005}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{100}} \approx 0.28 \pm 0.116$$

4. X=”Ljudnivå (dB)”, $E[X] = 23$, Var $X = 4.8$

   (a) $P[|X - 23| > 7] \leq P[|X - 23| \geq 7] \overset{Chebyshev}{\leq} \frac{\text{Var } X}{7^2} = 4.8/49 \approx 0.098$

   (b) $X \sim Norm(23, \sqrt{4.8})$ ger

$$P[X > 30] = P\Big[\underbrace{\frac{X - 23}{\sqrt{4.8}}}_{\sim Norm(0,1)} \geq \underbrace{\frac{30 - 23}{\sqrt{4.8}}}_{\approx 3.195}\Big] \approx 1 - \Phi(3.195) \approx 1 - 0.99929 \approx 0.00071$$

5. X=”Tid för nya spisen”, $X \sim Norm(\mu_X, \sigma)$ med stickprov: $n_X = 20, \bar{x} = 5.9, s_X^2 = 3.23$
   Y=”Tid för gamla spisen”, $Y \sim Norm(\mu_Y, \sigma)$ med stickprov: $n_Y = 25, \bar{y} = 8.7, s_Y^2 = 2.91$

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim Norm(\mu_X - \mu_Y, \sqrt{\frac{\sigma^2}{20} + \frac{\sigma^2}{25}})$$

   Vi skattar σ med den sammanvägda variansen $s_p^2 = \frac{(20-1)s_x^2 + (25-1)s_Y^2}{20+25-2} \approx 3.052$ och får

$$\bar{X} - \bar{Y} \overset{appr}{\sim} Norm(\mu_X - \mu_Y, \sqrt{\frac{s_p^2}{20} + \frac{s_p^2}{25}}) \overset{appr}{\sim} Norm(\mu_X - \mu_Y, 0.5241)$$

Standardnormalfördelningen ger nu

$$P\left[\left|\frac{\mu_X-\mu_Y-(\bar{X}-\bar{Y})}{0.5241}\right|\le z_{0.025}\right]\approx 0.95 \Leftrightarrow P\left[|\mu_X-\mu_Y-(\bar{X}-\bar{Y})|\le z_{0.025}\cdot 0.5241\right]\approx 0.95$$

Med $z_{0.025}\approx 1.96$ ur tabell fås det 95%-iga konfidensintervallet som

$$\mu_X-\mu_Y=\bar{x}-\bar{y}\pm z_{0.025}\cdot 0.5241\approx 2.8\pm 1.03$$

6. $X_i =$ "Kalles höjd i hopp nummer i ", $i=1,2,3,\dots$
   $Y_i =$ "Annas höjd i hopp nummer i ", $i=1,2,3,\dots$
   Alla X_i och Y_i är oberoende, $X_i\sim Norm(241,3)$ och $Y_i\sim Norm(239,4)$
   Inför också händelserna A_i={Kalle når äpplet i hopp i}=$\{X_i\ge 245\}$ och B_i={Anna når äpplet i hopp i}=$\{Y_i\ge 245\}$
   (a) $P[A_i]=P[X_1\ge 245]=P\Big[\underbrace{\frac{X_1-241}{3}}_{\sim Norm(0,1)}\ge\frac{245-241}{3}\Big]=1-\Phi(4/3)\approx 1-0.91\approx 0.09$
   (b) P[Kalle lyckas först på femte försöket] $=P[A_1^CA_2^CA_3^CA_4^CA_5]=0.91^4\cdot 0.09\approx 0.061$
   (c) $P[B_1]=P[Y_1\ge 245]=P\Big[\underbrace{\frac{Y_1-239}{4}}_{\sim Norm(0,1)}\ge\frac{245-239}{4}\Big]=1-\Phi(6/4)\approx 1-0.9332\approx 0.067$
   P[Någon lyckas på 1 försök] $=P[A_1\cup B_1]=1-P[A_1^C\cap B_1^C]\approx 1-0.91\cdot 0.9332\approx 0.15$

7. (a) Frekvensfunktionen f_{XY} ges av

$Y\backslash X$	0	1	2
0	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{12}{36}$	$\frac{6}{36}$	0
2	$\frac{9}{36}$	0	0

   (b) $E[X]=\frac{10\cdot1+1\cdot2}{36}=\frac{1}{3}$, $E[X^2]=\frac{10\cdot1^2+1\cdot2^2}{36}=\frac{14}{36}$, Var $X=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{10}{36}$
   $E[Y]=\frac{18\cdot1+9\cdot2}{36}=1$, $E[Y^2]=\frac{18\cdot1^2+9\cdot2^2}{36}=\frac{3}{2}$, Var $Y=E[Y^2]-(E[Y])^2=\frac{1}{2}$,
   $E[XY]=\frac{6\cdot1}{36}=\frac{1}{6}$
   $\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\text{Var }X\cdot\text{Var }Y}}=\frac{E[XY]-E[X]E[Y]}{\sqrt{\text{Var }X\cdot\text{Var }Y}}=\frac{1/6-1/3}{\sqrt{\frac{10}{36}\cdot\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{(5)}}$

8. X="Antal fel på första 3 meterna av tyget", $X\sim Po(0.9)$
   Y="Längd (meter) till första felet", $Y\sim Exp(0.3)$
   (a) $E[Y]=\frac{1}{0.3}\approx 3.33$
   (b) $P[Y\ge 3]=1-F_Y(3)=1-(1-e^{-0.3*3})=e^{-0.9}\approx 0.41$
   (c) $P[X\le 3|Y<3]=\frac{P[X\le 3\cap Y<3]}{P[Y<3]}=\frac{P[1\le X\le 3]}{P[Y<3]}=\frac{e^{-0.9}(0.9+\frac{0.9^2}{2!}+\frac{0.9^3}{3!})}{1-e^{-0.9}}\approx 0.978$

9. Tillstånd 2 är det enda absorberande.
   Låt $t_1=E$[antal steg tills vi når 2 om vi startar i 1]
   och $t_3=E$[antal steg tills vi når 2 om vi startar i 3].
   Det sökta är då t_1 som ges av ekvationssystemet

$$\begin{cases} t_1=1+\frac{2}{3}t_3 \\ t_3=1+\frac{1}{2}t_1+\frac{1}{2}t_3\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases} t_1=7\\ t_3=9\end{cases}$$

10. (a) Den genererande funktionen för a_n, $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ges av

$$A(x) = (x^5 + x^6 + x^7 \dots)(x^5 + x^6 + x^7 \dots)(x^5 + x^6 + x^7 \dots) = \left(\frac{x^5}{1-x}\right)^3$$
$$= \frac{x^{15}}{(1-x)^3} = x^{15} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n$$

(b) Så a_{30}, dvs koefficienten framför x^{30} i $A(x)$, blir $a_{30} = \binom{15+2}{2} = 136$