Lösningar till tentamen i Matematisk statistik och diskret matematik IT (MVE050).
Den 10 april 2007.

1. Låt v och n beteckna vinst- resp. nitlott och låt Y vara antal dragna lotter tills vinst fås. Vi har då tre utfall vars sannolikhet är (rita träddiagram):

utfall	sannolikhet	Y
v	1/2	1
nv	1/3	2
nnv	1/6	3

Väntevärdet blir alltså: $\mathrm{E}[Y] = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 3 = \frac{5}{3}$

2. a) $X \sim \mathrm{Norm}(3525, 510)$ ger
   $\mathrm{P}(X > 4000) = 1 - \Phi(\frac{4000-3525}{510}) \approx 1 - \Phi(0.931) \approx 1 - 0.824 = 17.6\%$
   b) $X_i \sim \mathrm{Norm}(3525, 510), i = 1 \ldots 10$ har medelvärdet $\bar{X} \sim \mathrm{Norm}(3525, \frac{510}{\sqrt{10}})$
   $\mathrm{P}(\bar{X} > 4000) = 1 - \Phi(\frac{4000-3525}{510/\sqrt{10}}) \approx 1 - \Phi(2.945) \approx 1 - 0.9984 = 0.16\%$

3. a) $\hat{p}_1 = \frac{138}{7000} \approx 1.97\%$ och $\hat{p}_2 = \frac{157}{7000} \approx 2.24\%$.
   Konfidensintervallet blir $\hat{p}_2 - \hat{p}_1 \pm z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{7000} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{7000}} \approx 0.27\% \pm 0.48\%$
   b) Nej, intervallet innehåller nollan.

4. Låt X vara antal institut som kommer fram till slutsatsen. Då är $X \sim \mathrm{Bin}(10, 0.1)$ och $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.9^{10} \approx 65\%$

5. Låt $M = \{$medborgare X är mördaren$\}$ och $U = \{$testet ger positivt utslag$\}$.
   Bayes sats ger då

$$\mathrm{P}(M|U) = \frac{\mathrm{P}(U|M)\,\mathrm{P}(M)}{\mathrm{P}(U|M)\,\mathrm{P}(M) + \mathrm{P}(U|M^C)\,\mathrm{P}(M^C)}$$

   $\mathrm{P}(M) = \frac{1}{9.12\cdot 10^6}$, $\mathrm{P}(M^C) = 1 - \mathrm{P}(m)$, $\mathrm{P}(U|M) = 0.999999$ och $\mathrm{P}(U|M^C) = 0.000001$ ger $\mathrm{P}(M|U) \approx 0.0988 \approx 9.9\%$

6. Bilda en markovkedja med tre tillstånd (0,1,2), där tillstånd i innebär att de i senaste slagen var sexor men inte slaget innan dess. Övergångsmatrisen blir:

p_{ij}	0	1	2
0	5/6	1/6	0
1	5/6	0	1/6
2	0	0	1

Om vi börjar i tillstånd 0 så kommer markovkedjan nå 2 precis då två sexor har slagits i följd. Låt $m_i = \mathrm{E}[$antal slag tills nod 2 nås om vi börjar i nod $i]$. Då är:

$$\begin{cases} m_2 = 0 \\ m_1 = 1 + \frac{5}{6}m_0 + \frac{1}{6}m_2 \\ m_0 = 1 + \frac{5}{6}m_0 + \frac{1}{6}m_1 \end{cases}$$

Detta ger $m_0 = 42$.

7. a) X = antal fel under första tre åren, $X \sim \text{Po}(0.3)$
   $\text{P}(X \geq 1) = 1 - \text{P}(X = 0) = 1 - \frac{e^{-0.3} \cdot 0.3^0}{0!} \approx 0.2592 \approx 26\%$
   b) Y = antal år tills första felet inträffar, $Y \sim \text{Exp}(0.1)$, $F_Y(y) = 1 - e^{-0.1y}$
   $\text{P}(3 \leq Y \leq 6) = F_Y(6) - F_Y(3) = 1 - e^{-0.6} - 1 + e^{-0.3} \approx 0.1920 = 19.2\%$

8. a) $X \sim \text{Geom}(\frac{10}{n})$ ger $\text{E}[\hat{n}] = \text{E}[10X] = 10\,\text{E}[X] = 10\frac{n}{10} = n$
   b) $\text{Var}\,\hat{n} = \text{Var}[10X] = 100\,\text{Var}\,X = 100\frac{1-\frac{10}{n}}{(\frac{10}{n})^2} = n(n-10)$

9. $f_X(x) = \frac{1}{2}, 0 \leq x \leq 2$ och $\text{E}[X_i] = 1$
   $\text{E}[X_i^2] = \int_0^2 \frac{x^2}{2}dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$
   $\text{Var}[X_i] = \text{E}[X_i^2] - (\text{E}[X_i])^2 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$
   Enligt centrala gränsvärdessatsen är S approximativt normalfördelad. Parametrarna ges av $\text{E}[S] = \text{E}[X_1 + \cdots + X_{100}] = 100\,\text{E}[X_1] = 100$ och
   $\text{Var}[S] = \text{Var}[X_1 + \cdots + X_{100}] = 100\,\text{Var}[X_1] = \frac{100}{3}$
   Alltså blir: $\text{P}(S < 90) = \Phi(\frac{90-100}{\sqrt{100/3}}) \approx \Phi(-1.732) \approx 4.2\%$