

Lösningar till tentamen i Matematisk statistik och diskret matematik (MVE055/MSG810).

Den 25 augusti 2009.

1. Lösning:

$A$  = person inskriven på GU.  $B$  = person inskriven på Chalmers.

a) Vi söker  $P(\text{inte inskriven på något av lärosätena}) = 1 - P(\text{inskriven på något av lärosätena}) = 1 - P(A \cup B)$ .

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.26 + 0.8 - 0.1 = 0.96.$$

Alltså har vi  $P(\text{inte inskriven på något av lärosätena}) = 1 - 0.96 = 0.04$

b)  $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.1}{0.26} \approx 0.385$

c)  $A$  och  $B$  oberoende om och endast om  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ . Men

$P(A \cap B) = 0.1$  och  $P(A)P(B) = 0.26 * 0.8 \approx 0.21$ , så händelserna är ej oberoende.

2. Lösning:

a) Definiera  $E$  = exakt 29 tärningsögon. Vi har utfallsrummet  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^5$ .  $\Omega$  består av  $6^5$  utfall. För att få totalt 29 tärningsögon krävs det att en tärning visar en femma och resten visar sexor. Det finns 5 sätt att välja ut den tärning som skall visa en femma. Händelsen  $E$  består alltså av fem utfall.

$$\mathbf{P}(E) = \frac{\#(E)}{\#(\Omega)} = \frac{5}{6^5} \approx 0.00064.$$

b) Definiera  $F$  = exakt 3 sexor. Låt  $X \sim \text{Bin}(5, \frac{1}{6})$

$$\mathbf{P}(F) = \mathbf{P}(X = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0.0322.$$

3. Lösning:

a) Vi har att

$$P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0.6 + 0.4 * 0.6 + 0.4^2 * 0.6 \approx 0.936$$

Vi söker  $P(X = 1 | X \leq 3)$  som ges av

$$P(X = 1 | X \leq 3) = \frac{P(X=1 \cap X \leq 3)}{P(X \leq 3)} = \frac{P(X=1)}{P(X \leq 3)} = \frac{0.6}{0.936} \approx 0.641$$

b) Värdet på  $X$  bestämmer helt och hållet värdet på  $Y \implies |\rho_{xy}| = 1$ .

'Stora'  $X$  ger 'små'  $Y$  och 'små'  $X$  ger 'stora'  $Y$ .  $\implies \rho_{xy} < 0$ .

Alltså har vi  $\rho_{xy} = -1$ .

c)  $\mathbf{Var}(Y) = \mathbf{Var}(-X) = (-1)^2 \mathbf{Var}(X) = \mathbf{Var}(X) = 0.4/0.6^2 \approx 1.11$ , där vi använt att  $\mathbf{Var}(X) = (1-p)/p^2$  om  $X \sim \text{Geo}(p)$

4. Lösning:

a) En lämplig teststatistika för att testa hypotesen är  $(\bar{X} - 1000)/(S/\sqrt{50})$ . Låt  $U$  beteckna denna teststatistika. Om  $H_0$  är sann då gäller att  $U \sim N(0, 1)$  (approximativt). Våra observerade värden för  $\bar{X}$  och  $S^2$  är  $\bar{x} = 999.25$  och  $s^2 = 1.55$ . Vårt observerade värde på den stokastiska variabeln  $U$  blir då,  $u = -4.26$ . Detta ger  $p$ -värdet =  $\mathbf{P}(U \leq -4.26) = \Phi(-4.26) < 0.001$

- b)  $p$ -värdet är sannolikheten att få ett minst så "extremt" värde som vi observerat om  $H_0$  är sann.  
 c) Vi har observerat ett värde som OM  $H_0$  är sann inträffar mindre än en gång på 1000. Vi drar slutsatsen att Bert kan förkasta  $H_0$  till förmån för  $H_1$ .

5. Lösning:

- a) Se föreläsningssanteckningar  
 b) Värdet beskrivs med en Markovkedja med följande övergångsmatrix. (Tillstånd 1 sol, tillstånd 2 mulet, tillstånd 3 regn)

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Svaret på frågan ges av det första elementet i

$$(0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}^2 = (0.6 \ 0.1 \ 0.3) \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix} = (0.59 \ 0.21 \ 0.20)$$

Alltså, sannolikheten för sol två dagar efter regn i staden under modellen är 0.59.

Lösning:

Låt

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{om person } i \text{ är positiv till EMU} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$\bar{X} = \frac{1}{50} \sum_i^{50} X_i$  Ett 95%-igt konfidensintervall ges av:

$$p = \bar{X} \pm z_{0.95} \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}$$

Med  $z_{0.95} = 1.96$  och  $\bar{X} = \frac{31}{50}$  får vi att det 95%-iga konfidensintervallet för andelen som är positiva till EMU är (0.486, 0.755).

6. Lösning:

Antalet sätt ges av koefficienten framför  $x^{40}$  i följande uttryck:

$$\begin{aligned} (1 + x + x^2 + \dots + x^{15})^5 &= \left(\frac{1-x^{16}}{1-x}\right)^5 \\ &= (1-x^{16})^5 \left(\frac{1}{1-x}\right)^5 \\ &= (1 + 5(-x^{16}) + 10(-x^{16})^2 + 10(-x^{16})^3 + 5(-x^{16})^4 + (-x^{16})^5) \frac{1}{(1-x)^5} \\ &= (1 - 5x^{16} + 10x^{32} - 10x^{48} + 5x^{64} - x^{80}) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+4}{4} x^n \end{aligned}$$

Koefficienten framför  $x^{40}$  är alltså

$$\binom{40+4}{4} - 5 \binom{24+4}{4} + 10 \binom{8+4}{4} = 38326$$

8. Lösning:

- a) Låt  $W$  vara paketets vikt.  $W = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5$ .  $W$  är normalfördelad enligt sats.  $\mathbf{E}[W] = \sum_{i=1}^5 \mathbf{E}[V_i] = 5 * 995 = 4975$ .  $\mathbf{Var}(W) = \sum_{i=1}^5 \mathbf{Var}(V_i) = 80$   
 $\mathbf{P}(W \leq 5000) = \mathbf{P}(Z \leq \frac{5000-4975}{\sqrt{80}}) = \Phi(2.795) \approx 1 - 0.0026$
- b) Låt nu  $W$  vara paketets vikt enligt pakningsstrategin i deluppgift b.  
 $W = 2V_1 + 2V_2 + V_3$ .  $W$  är normalfördelad enligt sats.  
 $\mathbf{E}[W] = \sum_{i=1}^5 \mathbf{E}[V_i] = 5 * 995 = 4975$ .  $\mathbf{Var}(W) = \mathbf{Var}(2V_1 + 2V_2 + V_3) =$   
 $\mathbf{Var}(2V_1) + \mathbf{Var}(2V_2) + \mathbf{Var}(V_3) = 4 \mathbf{Var}(V_1) + 4 \mathbf{Var}(V_2) + \mathbf{Var}(V_3) = 144$   
 $\mathbf{P}(W \leq 5000) = \mathbf{P}(Z \leq \frac{5000-4975}{\sqrt{144}}) = \Phi(2.083) \approx 1 - 0.0186$

9. Lösning:

$$m_X(t) = \exp\{\mu_X t + \frac{1}{2}\sigma_X^2 t^2\} \quad m_Y(t) = \exp\{\mu_Y t + \frac{1}{2}\sigma_Y^2 t^2\}$$

Definiera  $Z = X + Y$ . Då ges den momentgenererande funktionen för  $Z$  av

$$\begin{aligned} m_Z(t) &= \mathbf{E}[e^{Zt}] \\ &= \mathbf{E}[e^{(X+Y)t}] \\ &= \mathbf{E}[e^{Xt}] \mathbf{E}[e^{Yt}] \\ &= m_X(t) m_Y(t) \\ &= \exp\{\mu_X t + \frac{1}{2}\sigma_X^2 t^2\} \exp\{\mu_Y t + \frac{1}{2}\sigma_Y^2 t^2\} \\ &= \exp\{(\mu_X + \mu_Y)t + \frac{1}{2}(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)t\} \end{aligned}$$

vilket är den momentgenererande funktionen för en normalfördelad stokastisk variabel med väntevärde  $\mu_X + \mu_Y$  och varians  $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$ . Alltså är  $Z \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$  (ty den momentgenererande funktionen bestämmer fördelningen).