

TENTAMEN: Matematisk statistik och diskret matematik IT (MVE050)

Tid och plats: Torsdagen den 21 december 2006, kl. 8.30–12.30, M-huset.

Jour: Marcus Isaksson, tel 0708-527663. Besöker tentamenssalen ca kl 10.00, 11.30.

Tillåtna hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare och Beta.

Betygsgränser: 3: 12 poäng, 4: 18 poäng, 5: 24 poäng. Maximalt antal poäng är 30.

1. (3p) Låt A och B vara två händelser med $P(A) = 0.25$ och $P(B) = 0.5$. Beräkna $P(B|A)$ i följande fall:
 - a) A och B är oberoende.
 - b) A och B är disjunkta.
 - c) $P(A|B) = 0.2$
2. (3p) Om DoS-attacker och andra extrema situationer ignoreras kan anropen till en viss web-server mellan kl 8.00 och 9.00 modelleras som en poissonprocess med i snitt 20 anrop per sekund.
 - a) Vad är sannolikheten att servern anropas minst 5 gånger under den första tiondels sekunden efter kl 8.00?
 - b) Hur lång tid kan man förvänta sig att dröjer innan det första anropet efter kl 8.00 sker?
3. (3p) Per och Anna börjar alltid söndagen med att parti Yahtzee (förloraren står för diskningen nästkommande vecka). På sistonde har Per vunnit oroväckande ofta och Anna misstänker att han har modifierat tärningarna (vanliga 6-sidiga tärningar). I syfte att bekräfta sin misstanke väljer hon ut en av de misstänkta tärningarna, kastar den 100 gånger och antecknar 24 sexor (hon skakar tärningen tillräckligt mycket för att kasten ska kunna antas vara oberoende och likafördelade).
 - a) Gör ett 95%-igt (dubbelsidigt) konfidensintervall för sannolikheten att få en sexa när den utvalda tärningen kastas.
 - b) Kan du baserat på a) dra slutsatsen att tärningen är modifierad?
4. (3p) Låt X vara en stokastisk variabel med frekvensfunktionen

$$f_X(x) = 2^{-x-1}, x = 0, 1, 2, \dots$$

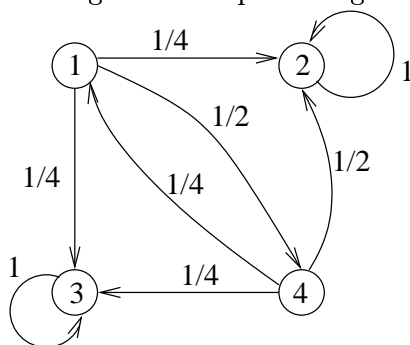
- a) Vad är den momentgenererande funktionen $m_X(t)$ för X ? För vilka värden på t är $m_x(t)$ ändlig?
 - b) Vad är $E[X]$?
5. (3p) Låt X och Y vara stokastiska variabler som antar värdena 1, 2 eller 3 enligt en tvådimensionell frekvensfunktion av följande form (där c är en konstant):

$$f_{XY}(x, y) = c(x + y) \text{ för } x = 1, 2, 3 \text{ och } y = 1, 2, 3$$

- a) Bestäm konstanten c så att $f_{XY}(x, y)$ blir en frekvensfunktion.
- b) Bestäm marginalfördelningarna $f_X(x)$ och $f_Y(y)$ för X och Y .
- c) Beräkna $\text{Cov}(X, Y)$.

6. (4p) Låt X och Y vara oberoende normalfördelade variabler. X med väntevärde 3 och standardavvikelse 6. Y med väntevärde 2 och standardavvikelse 5.
- Beräkna väntevärde och standardavvikelse för $4X - 2Y$?
 - Vad är $P[4X < 2Y]$?
7. (4p) Betrakta en slumpvandring där vi börjar i en viss nod i figur 1 och i varje steg (oberoende av vad som hänt tidigare) följer en slumpmässig pil ut från den noden till en angränsande nod. Sannolikheten för att en viss pil följs ges av talet jämte pilen. Resultatet blir en markovkedja med fyra tillstånd (motsvarande noderna) 1, 2, 3, 4.

Figur 1: Slumpvandring



- Vilka tillstånd är absorberande?
 - Vad är sannolikheten att vi befinner oss i nod 2 efter 2 steg om vi börjar i nod 4?
 - Vad är sannolikheten att vi till slut absorberas i nod 2 om vi börjar i nod 4?
8. (3p) Låt X_1, X_2, \dots, X_n , där n är udda, vara ett stickprov från fördelningen av en stokastisk variabel X med väntevärde μ och varians σ^2 .
- Visa att $\hat{\mu} = X_1 - X_2 + X_3 - X_4 + \dots + X_n$ är en väntevärdesriktig skattare för μ .
 - Vad är $\text{Var } \hat{\mu}$?
 - Är $\hat{\mu}$ en bra skattare för μ ? Motivera!
9. (4p) I syfte att beräkna den genomsnittliga pingtiden mellan en viss dator på Chalmers och en viss dator på KTH mättes ping-tiden 1 gång per sekund under 10 sekunder och följande värden (i ms) noterades:

7.99 7.70 7.81 7.59 7.63 7.72 7.55 7.65 7.53 7.74

P.g.a nätstrukturen kan de uppmätta ping-tiderna antas vara oberoende och normalfördelade med samma väntevärde μ och varians σ^2 .

- Beräkna ett 90%-igt konfidensintervall för den förväntade pingtiden μ .
- Anta att ovanstående experiment upprepas 100 gånger och att alla erhållna värden återigen kan antas vara oberoende och fördelade som ovan.
Vad är det förväntade antalet gånger som konfidensintervallet innehåller det korrekta värdet på μ ?

Lycka till!