

**TENTAMEN:** Matematisk statistik och diskret matematik (MVE050/MSG810).

Statistik för fysiker (MSG820)

**Tid och plats:** Tisdagen den 25 augusti 2009, kl. 08.30–12.30, Väg och vatten-salar

**Jour:** Oscar Hammar, tel 0708-300715.

**Tillåtna hjälpmedel:** Chalmersgodkänd räknare och Beta.

**Betygsgränser:** 3: 12 poäng, 4: 18 poäng, 5: 24 poäng. Maximalt antal poäng är 30.

1. (3p) På ett studenheim bor 50 personer. 13 av personerna är inskrivna på GU. 40 av personerna är inskrivna på Chalmers. 5 av personerna är inskrivna på både GU och Chalmers.
  - a) Beräkna sannolikheten att en slumpvis vald person bland de boende inte är inskriven på varken GU eller Chalmers.
  - b) Beräkna sannolikheten att en slumpvis vald person bland boende som är inskrivna på GU också är inskriven på Chalmers.
  - c) Är händelserna 'en slumpvis vald boende är inskriven på Chalmers' och 'en slumpvis vald boende är inskriven på GU' oberoende? Motivera!
2. (3p) Antag att du kastar fem rättvisa sexkantiga tärningar.
  - a) Vad är sannolikheten att du får upp exakt 29 tärningsögon?
  - b) Vad är sannolikheten att exakt tre tärningar blir sexor? (Här är det inte lämpligt att skriva upp hela utfallsrummet. Använd istället att svaret på frågan ges av sannolikheten att en viss stokastisk variabel antar ett visst värde.)
3. (3p) Låt  $X$  vara en geometriskt fördelad stokastisk variabel med parameter  $p = 0.6$ . Låt  $Y = -X$ , dvs om  $X$  antar värdet 4 så antar  $Y$  värdet -4. Beräkna följande
  - a)  $P(X = 1 | X \leq 3)$
  - b) Korrelationen mellan  $X$  och  $Y$
  - c) Variansen för  $Y$ .
4. (4p) En viss pastatillverkare hävdar att deras paket innehåller 1000g pasta. Bert tror att medelvikten för innehållet i ett paket från tillverkaren är lägre än 1000g. Låt  $X_i$  beteckna vikten hos ett slumpvis valt paket från tillverkaren. Låt  $\mu = \mathbf{E}[X_i]$ . Bert vill utföra ett hypotestest med

$$H_0 : \mu = 1000g \quad H_1 : \mu < 1000g$$

Vikterna för 50 slumpvis valda paket sammanfattas i  $\bar{x} = 999.25$  och  $s^2 = 1.55$ .

- a) Vad är  $p$ -värdet för testet baserat på Berts insamlade data?
  - b) Vad är tolkningen av  $p$ -värdet?
  - c) Avgör baserat på  $p$ -värdet om Bert kan förkasta  $H_0$  till förmån för  $H_1$ .
5. (4p) Antag att vädret i en viss stad kan beskrivas med följande enkla modell. Det finns bara tre vädertyper; sol, mulet, regn.  
Om det är sol en viss dag så är sannolikheten för sol nästa dag 0.6, sannolikheten för mulet väder nästa dag 0.3 och sannolikheten för regn nästa dag 0.1.

Om det är mulet en viss dag så blir det sol nästa dag med sannolikhet 0.5 och regn nästa dag med sannolikhet 0.5.

Om det är regn en viss dag så är sannolikheten för sol nästa dag 0.6, sannolikheten för mulet väder nästa dag 0.1 och sannolikheten för regn nästa dag 0.3

- a) Definiera Markovegenskapen för en sekvens av stokastiska variabler.
- b) Om det regnar i staden idag, vad är då sannolikheten för sol om två dagar?

6. (3p) Du vill undersöka hur stor andel av röstberättigade svenskar som är positiva till ett svenskt inträde i EMU. Du frågar 50 slumpvis valda individer ur populationen varav 31 svarar att de är positiva. Gör ett tvåsidigt 95%-igt konfidensintervall för andelen röstberättigade svenskar som är positiva till ett svenskt inträde i EMU baserat på denna data.

7. (4p) På hur många olika sätt kan man fördela 40 identiska godisar mellan 5 barn om ingen får få mer än 15 godisar? Du kan ha användning av följande resultat om en geometrisk summa:

$$\sum_{n=0}^k x^n = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}$$

och följande resultat:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

8. (4p) Kalle har som uppgift att packa paket i en fabrik. De enheter han ska packa kommer in i par. Kalle noterar att vikterna *inte* skiljer sig mellan enheter som tillhör samma par men att vikterna skiljer mellan enheter som kommer från olika par. Kalles uppgift är att packa paket om fem enheter. I snitt väger en enhet 995g. De fem enheterna bör tillsammans inte väga mer än 5000g. Kalle inser att chansen att klara maxvikten 5000g är större om han tar fem enheter från olika par.

Kalle antar följande modell. Låt  $V_i$  beteckna vikten för  $i$  enhet från par  $i$ .  $V_i$  är normalfördelad med väntevärde 995g och standardavvikelse 4g.

- a) Vad är sannolikheten att fem enheter från olika par klarar maxvikten 5000g under Kalles modell? (Vikterna för enheter från olika par antas vara oberoende.)
- b) Om Kalle tar båda enheterna från två par och den ena enheten från ett tredje par och paketerar tillsammans, vad är då sannolikheten att totalvikten inte överstiger 5000g? (Vikterna för enheter från olika par antas vara oberoende.)

9. (3p) Låt  $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$  och  $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  och  $X$  och  $Y$  oberoende. Visa att  $X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$ . Du kan använda resultatet att den momentgenererande funktionen för en stokastisk variabel unikt bestämmer dess fördelning utan att bevisa det. Den momentgenererande funktionen  $m_X(t)$  för en normalfördelad stokastisk variabel  $X$  med väntevärde  $\mu_X$  och varians  $\sigma_X^2$  ges av

$$m_X(t) = \exp\{\mu_X t + \frac{1}{2}\sigma_X^2 t^2\}$$

Lycka till!