Matematisk Statistik och Disktret Matematik, MVE051/MSG810, VT19

Nancy Abdallah

Chalmers - Göteborgs Universitet

March 25, 2019

1. Inledning till sannolikhetsteori

2. Sannolikhetslagar

Lärare

Kursansvarig, föreläsare:	Nancy Abdallah
Rum:	L2106
E-mail:	nancya@chalmers.se
Övningsledare:	Nancy Abdallah Stina Andersson Joan Persson

Kurslitteratur

(MA) J. Milton, J. Arnold, Introduction to Probability and Statistics 4th ed McGraw-Hill

(GS) C. Grinstead, J Snell, Introduction to Probability AMS (on-line).

(EG) E. Eriksson, H. Gavel, Diskret matematik, Studentlitteratur, ISBN 9144028784. Relevanta delar av boken finns i PingPong.

(A) J. Anderson, J. Bell, J. Anderson, Discrete Mathematics with Combinatorics. Vi använder bara några övningar; dessa kan hittas på PingPong.

Föreläsningar och övningar

Föreläsningar: Tisdagar och torsdagar kl13:15-15:00

Övningar: Onsdagar och fredagar kl 10:00-11:45
(*3 grupper, gruppindelning finns på kurshemsida*)

	dag	**plats**	**Övningsledare**
Grupp 1	Onsdag	EL41	Nancy
Grupp 1	Fredag	ES52	Nancy
Grupp 2	Onsdag och fredag	EL42	Stina
Grupp 3	Onsdag och fredag	EL43	Johan

Examination

Examinationen har två moment

- Skriftlig tentamen i slutet av kursen
- Inlämningsuppgifter

Inlämningsuppgifter:

- Tre obligatoriska inlämningsuppgifter.
- Grupper på 1-3 personer.
- Uppgifterna lämnas in via PingPong.
- Deadline: 10 april, 10 maj och 26 maj.

1. Inledning till sannolikhetsteori

2. Sannolikhetslagar

Vad är sannolikhet?

Vad är sannolikheten för lyckad hjärtoperation?
Vad är sannolikheten för att vinna lotteriet?
Vad är sannolikheten för att det blir soligt imorgon?

Sannolikhet ett mått på hur troligt det är att en viss händelse inträffar.

Definitioner

- **Utfall:** Resultat av ett slumpmässigt försök.
- **Utfallsrummet:** Mängden S av möjliga utfall.
- **Händelse:** En samling utfall, delmängd av S.
- **Trädiagram**: Ett sätt att beskriva vissa utfallsrum.
- Den tomma mängden kallas den **omöjliga händelsen**, och betecknas $\varnothing$.
- S kallas den **säkra händelsen.**
- Två händelser A och B är **disjunkta** eller **oförenliga** om $A \cap B = \varnothing$
- Händelser $A_1, A_2, \ldots$ är **parvis disjunkta (oförenliga)** om $A_i \cap A_j = \varnothing$ för alla $i \neq j$.

Exempel

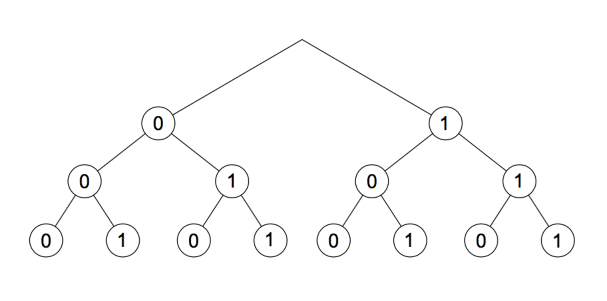
Låt oss kasta en tärning. Vi har sex möjliga utfall (=antal ögon) 1,2,3,4,5,6. Vi skriver $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
A={antal ögon udda} och B={antal ögon högst 2} är händelser.
Vi kan skriva $A = \{1, 3, 5\}$ *och* $B = \{1, 2\}$

Exempel

Låt oss kasta två tärningar på en gång.
$S = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 6)\}$
C="Summan av ögonen är högst 3"=$\{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

Exempel

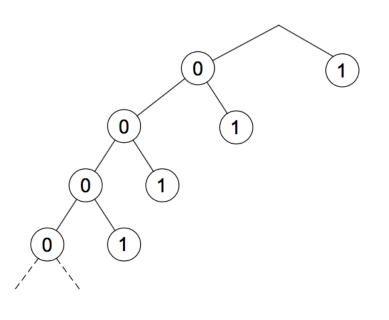
Ett mynt kastas 3 gånger. Klave kallas 0 och krona 1. Resultatet kan representeras med ett träd



$S = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$

Exempel

Myntet kastas tills krona erhålls för förta gången.



$S = \{1, 01, 001, 0001, \dots\}.$

Kombinatorik - Multiplikationsprincipen

Multiplikationsprincipen Anta att ett försök sker i k steg. Låt n_i vara antalet sätt varje steg inträffar for $i = 1, \dots, k$. Antalet gånger försöket utför är $\Pi_{i=1}^{k} n_i = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$

Exempel

På en fest var 9 herrar och 7 damer bjudna. Om herrarna dansar enbart med damerna och damerna enbart med herrerna kan vi bilda $9 \cdot 7 = 63$ *olika danspar.*

Läs "Guidelines for Using the Multiplication Principle s.11".

Kombinatorik - Permutation

Hur många möjliga tal kan man få från $\{1, 2, 3\}$ utan att repetera ett tal?
Enligt multiplikationsprincipen finns det $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ möjliga utfall,

$$123, 132, 213, 231, 312, 321.$$

Definition

En ordning av elementen i en mängd kallas för en permutation av elementen i mängden.

För att få fram antalet permutationer av n element, kan man tänka så här:
För plats ett har vi n val. För plats två har vi $n-1$ val för vi kan inte välja stycken som vi valde för plats ett, osv. Antalet alla möjligheter är:

$$n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = \Pi_{i=1}^{n} = n!.$$

$n!$ kallas n-fakultet. 0-fakultet definieras som $0! = 1$.

Sats

Antalet permutationer av n element är $n!$.

Hur många möjliga två siffror tal kan man få från $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ utan att repetera ett tal?
Enligt multiplikationsprincipen finns det $5 \cdot 4 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5!}{(5-2)!}$ olika tal.

Sats (Ordnat urval)

Antalet sätt, ${}_nP_k$, att ordna k olika element som väljs bland totalt n är

$$ {}_nP_k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} $$

Kombinatorik - icke ordnade urval

- Antalet sätt för att välja k element från en n-elementmängd där ordningen är inte viktig är lika med $\frac{{}_nP_k}{k!}$. Det betecknas ${}_nC_k$
- ${}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
- ${}_nC_k$ kallas binomial koefficient och betecknas också $\binom{n}{k}$.

Exempel

Det finns $\binom{52}{2} = \frac{52!}{2!50!} = \frac{52 \cdot 51}{2}$ *olika sätt att dra två kort från ett kortlek.*

Hur många ord får man om man permuterar bokstäverna av ordet “MAMMA”?

Antalet permutation av 5 bokstäver är 5!. Men eftersom det

finns 3 M, 2 A, delar man med 3! och 2!, så blir antalet olika utfall $\frac{5!}{3!2!}$.

Om S har n objekt där det finns n_1 stycken av det första slaget, n_2 stycken ac det andra slaget, osv fram till k_m stycken av det sista slaget, och $n_1 + \ldots n_k = n$, är antalet permutationer av element av S

$$\binom{n!}{n1, n2, \cdots n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Sannolikhet

Sannolikhet är ett tal mellan 0 och 1 som beskriver hur troligt det är att en händelse inträffar. Om händelsen kallas A, betecknas sannolikheten att A inträffar $p(A)$.

- Sannolikheten av den omöjliga händelsen är 0 ($p(\emptyset) = 0$). Om sannolikheten för A är nära 0 betyder det att det inte är troligt att A inträffar.
- Sannolikheten av den säkra händelsen är 1 ($p(S = 1$). Om sannolikheten för A är nära 1 betyder det att är troligt att A inträffar.

Frekventistiska Approximation

Anta att vi har ett slumpmässigt försök sådana att alla utfall är lika troliga. Man säger att sannolikheten är likformigt fördelad. Sannolikheten att händelsen A inträffar approximeras enligt

$$p(A) = \frac{n_A}{n}$$

där n är antalet försök och n_A är antalet gånger A sker.
När n är stor blir approximeringen mer korrekt.

Exempel

Följande tabell redovisar utfallen av 10 kast med en tärning. Man är intresserad av händelsen A="Kastad tärning visar sex ögon".

Försök	Resultat (antal ögon)	Händelse A	Relativ frekvens
1	5	Nej	0/1
2	6	Ja	1/2
3	2	Nej	1/3
4	3	Nej	1/4
5	4	Nej	1/5
6	4	Nej	1/6
7	1	Nej	1/7
8	6	Ja	2/8
9	5	Nej	2/9
10	1	Nej	2/10

Om vi repeterar kastning flera gånger ser vi att relativ frekvensen blir nära 1/6.

Klasiska sannolikhet

Anta att ett försök har n olika utfall som är lika troliga varav n_A innebär händelsen A . Den klassiska sannolikhetsdefinition säger att sannolikhetenen av A är

$$p(A) = \frac{n_A}{n}$$

Exempel

I förgående exemplet, $A = \{6\}$ och $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ så är

$$p(A) = \frac{1}{6}.$$

1. Inledning till sannolikhetsteori

2. Sannolikhetslagar

Räkneregler

S utfallsrum, A, B händelser.

- **Komplement:** Komplementhändelsen till A är händelsen A'="A inträffar inte." (betecknas A' eller $\bar{A}$ eller A^c)

$$p(A') = 1 - p(A).$$

- **Additionsatsen**

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

- A och B är disjunkta $\Rightarrow p(A \cap B) = 0$ och $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Exempel

A, B händelser så att $p(A) = 0.5$*,* $P(B) = 0.7$ *och* $p(A \cap B) = 0.4$*. Beräkna* $p(A \cup B)$*,* $p(A \cap B')$*,* $p(A' \cap B)$ *och* $p(A' \cap B')$*.*

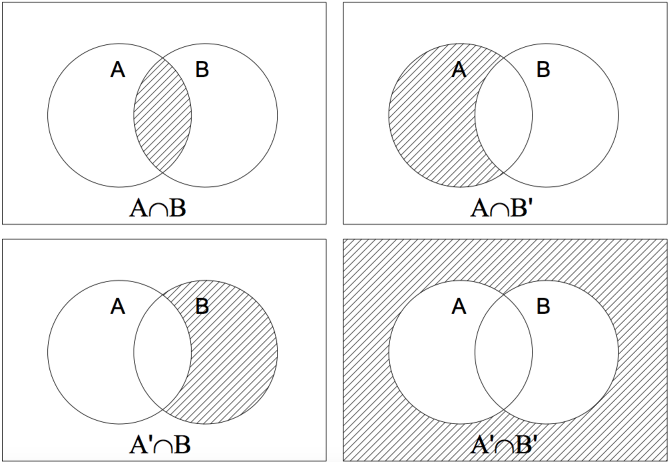
Lösning

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0.5 + 0.7 - 0.4 = 0.8$

$p(A \cap B') = p(A \setminus B) = 0.5 - 0.4 = 0.1$

$p(A' \cap B) = p(B \setminus A) = 0.7 - 0.4 = 0.3$

$p(A' \cap B') = p((A \cup B)') = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0.8 = 0.2$


A
B
A∩B
A
B
A∩B'
A
B
A'∩B
A
B
A'∩B'

Betingad sannolikhet

Exempel

I en tillverkningsprocess för en viss produkt kontrolleras kvaliteten, och en produkt klassificeras, för enkelhets skull, som antingen "duglig" eller "defekt". Man har data tillgängligt för dels en maskin i processen av äldre typ, dels en av nyare, se tabellen nedan. Totalt valdes 300 produkter ut slumpmässigt.

	Duglig	Defekt	Totalt
Äldre maskin	170	10	180
Ny maskin	115	5	120
Totalt	285	15	300

Exempel

A="Slumpvis produkt är duglig".
B="Slumpvis vald produkt är tillverkad vid äldre maskin".
C="Slumpvis vald produkt är dulig, givet tillverkad vid äldre maskin."
$p(A) = \frac{285}{300}$, $p(B) = \frac{180}{300}$
Händelsen C involverar såväl A som B, och vi skriver $C = A|B$, *där* $A|B$ *utläses "A, givet B". Från tabellen kan vi finna genom avläsning på raden för "Äldre maskin".*

$$p(C) = p(A|B) = \frac{170}{180} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Betingad sannolikhet

Den **betingade sannolikheten** för A, givet att händelsen B inträffat, definieras genom

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Exempel

Två servrar, A och B, ingår i ett nätverk. Antag att händelserna A och B motsvarar att A resp. B fungerar under en hel, slumpmässigt vald arbetsdag. Från driftstatistik har man funnit följande sannolikheter:

$$p(A) = 0.90, \quad p(B) = 0.85, \quad p(A \cap B) = 0.80.$$

Nätverket fungerar så länge minst en av servrarna fungerar. Vi kan införa händelsen

$$C = \text{“Nätverket fungerar”}$$

och eftersom $C = A \cup B$ finner vi

$$p(C) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0.95$$

Exempel

Antag nu att vi får en rapport om att server A är utslagen. Vilken blir sannolikheten att nätverket fungerar? Den sökta sannolikheten ges av

$$p(C|A') = \frac{p(C \cap A')}{p(A')} = \frac{p(C \setminus A)}{1 - p(A)} = \frac{0.05}{0.10} = 0.50$$

Multiplikationsregel

Multiplikationsregel:

$$p(A \cap B) = p(A|B)p(B) = p(B|A)p(A).$$

Så kan man skriva betingade sannolikheten som:

$$p(A|B) = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B)}.$$

Oberoende händelser

Oberoende händelser: Anta att informationen att B inträffat inte har något betydelse beträddande sannolikheten för A, då gäller $p(A|B) = p(A)$. Så multiplikationsregel blir $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.

Sats

A och B är oberoende om och endast om

$$p(A \cap B) = p(A)p(B).$$

Det är ekvivalent att säga att A och B är oberoende om och endast om $p(A|B) = p(A)$ om $p(B) \neq 0$ och $p(B|A) = p(B)$ om $p(A) \neq 0$.

Exempel

I ett avsnitt av en gruva finns två pumpar A och B som antas fungera oberoende av varandra. Produktion kan pågå så länge minst en pump fungerar. Vi inför händelserna
A="Pump A fungerar en slumpvis vald dag"
B="Pump B fungerar en slumpvis vald dag".
Vi vet att $p(A) = 0.9$ *och* $p(B) = 0.95$.
Sannolikheten för produktion en slumpvis vald dag är

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A)p(B) = 0.995.$$

Bayes formel

Exempel

I en industrilokal finns ett brandlarm. Det är förhållandevis pålitligt, men ibland sker falsklarm och en brand kan även missas. Låt B="Brand i lokalen" och L="Larm ljuder", $p(B) = 0.05$ *och* $p(L|B) = 0.98$*, och* $p(L|B') = 0.10$*. Beräkna* $p(B|L)$*.*

Lösning:

$$p(B|L) = \frac{p(B \cap L)}{p(L)} = \frac{p(L|B)p(B)}{p(L)}$$

Exempel

För att beräkna $p(L)$ kan vi använda först formeln

$$L = (L \cap B) \cup (L \cap B')$$

Men eftersom $L \cap B$ och $L \cap B'$ är disjunkta,

$$\begin{aligned} p(L) &= p(L \cap B) + p(L \cap B') \\ &= p(L|B)p(B) + p(L|B')p(B') \end{aligned}$$

Alltså

$$\begin{aligned} p(B|L) &= \frac{p(L|B)p(B)}{p(L|B)p(B) + p(L|B')p(B')} \\ &= \frac{0.98 \cdot 0.05}{0.98 \cdot 0.05 + 0.10(1 - 0.05)} \\ &= 0.34 \end{aligned}$$

Bayes formel

Låt $A_1, A_2, \cdots A_n$ vara parvis disjunkta händelser så vars unionen är S och $B \neq \emptyset$ en händelse. För varje A_j, $j = 1, \cdots n$

$$p(A_j|B) = \frac{p(B|A_j)p(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} p(B|Ai)p(A_i)}$$