Matematisk Statistik och Disktret Matematik, MVE051/MSG810, VT19

Föreläsning 5

Nancy Abdallah

Chalmers - Göteborgs Universitet

April 11, 2019

Exempel

I en given stad kan vädret ha tre tillstånd: **Regnigt, fint, snöigt.** Om det på en given dag är regnigt, kommer det medföra att sannolikheten för snö eller fint väder kommande dag är 0.25 vardera, och sannolikheten för regn är 0.5. Om vädret är fint en dag, kan det inte vara fint nästa dag, utan det kommer att antingen snöa eller regna med lika sannolikhet. Om en vald dag är snöig, vet man att sannolikheten att det regnar är 0.25, att det snöar 0.25 och att det blir fint väder 0.25. Varje dag är beroende endast på dagen innan. Värdena kan representeras med en matris:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} R & F & S \end{array} \\ \begin{array}{c} R \\ F \\ S \end{array} & \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemplet ovanför kallas för en Markovkedja.

Markovkedjor

- Mängd av tillstånd *(eng. states)* $\{s_1, \cdots, s_n\}$.
- Förflytta från ett tillstånd till ett annat i följd.
- Varje förflyttning kallas för ett steg *(eng. step)*
- Sannolikheten för att förflytta sig från tillstånd s_i till tillstånd s_j betecknas p_{ij} och är lika med den betingande sannolikheten för att vara på tillstånd s_j, given att det förra steget var s_i.
- p_{ij} kallas **övergångssannolikhet** *(eng. transition probability)*, och matrisen $P = (p_{ij})$ kallas **övergångsmatrisen** *(eng. transition matrix)*.
- För övergångsmatrisen gäller
  1. Alla $p_{ij} \geq 0$.
  2. $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$, dvs alla rader summerar sig till 1.

- Om vektorn $\mathbf{v}_k = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ är sannolikheterna vid steg k så är vektorn $v_{k+1} = \mathbf{v}_k P$ sannolikheterna vid steg $k+1$, och vektorn $\mathbf{v}_{k+s} = \mathbf{v}_k P^s$ sannolikheterna vid steg $k+s$.
- Elementet av P^n på rad i och kolumn j betecknas $p_{ij}^{(}n)$ och ger sannolikheten att vara i tillstånd s_j efter n steg om man förflyttar från tillstånd s_i.
- Vektorn $\mathbf{v}_0$ kallas **startvektor**.

Reguljär Markovkedjor

- En Markovkedja är reguljär *(eng. regular)* om det existerar en n så att alla elementen av matrisen P^n är nollskild. Matrisen i exemplet på första sidan är reguljär eftersom

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.4375 & 0.1875 & 0.375 \\ 0.375 & 0.25 & 0.375 \\ 0.375 & 0.1875 & 0.4375 \end{pmatrix}$$

- Om P är övergångsmatrisen till en reguljär Markovkedje, så gäller att $P^n \to Q$ där Q ser ut som

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_1 & \dots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \dots & q_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_k & q_k & \dots & q_k \end{pmatrix}$$

q_j är sannolikhet att vara i tillstånd s_j efter flera förflyttning.

Absorberande Markovkedjer

- Ett tillstånd kallas **absorberande** *(eng. absorbing)*, om det är omöjligt att lämna det, dvs. $p_{ij} = 1$.
- En Markovkedje kallas **absorberande** om det har minst ett aborberande tillstånd och det är möjligt att gå från varje tillstånd till en absorberande tillstånd i ett eller flera steg.
- Tillstånden som är inte absorberande i en absorberande Markovkedja kallas **transient**.
- Exempel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

- Övergångsmatrisen till en absorberande Markovkedje med r absorberande tillstånd och t transient kan skrivas som

$$P = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I_r \end{pmatrix}$$

där vi re-nummererat tillstånden så att de absorberande tillstånden har högst index. I_r är identitetsmatrisen, 0 är matrisen med bara nollor, Q är en $t \times t$-matris och R är en $t \times r$ nollskild matris. Denna formen kallas **kanonisk form** *(eng. canonical form)*.

- $P^n = \begin{pmatrix} Q^n & \star \\ 0 & I_r \end{pmatrix}$ där $\star$ är en $t \times r$ matris.
- Q^n ger sannolikheter för att vara i varje transient tillstånd efter n steg om man förflyttar från ett transient tillstånd.

Anta att vi har en absorberande Markovkedja med övergångs-matris $P = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I_r \end{pmatrix}$

- Sannolikheten för att en absorberande Markovkedja änder i ett absorberande tillstånd är 1, dvs. $Q_n \to 0$ när $n \to \infty$.
- Matrisen $I_t - Q$ är inverterbar. Låt $N = (I_t - Q)^{-1}$. N kallas den **fundamentala matrisen**.
- Elementen n_{ij} av N beskriver väntevärdet fär antalet gånger en kedja som startar med s_i är i det transienta tillståndet s_j innan att det blir absorberat.

Tid till absorption

- Om $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ är matrisen $N\mathbf{c} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_t \end{pmatrix}$ där d_i är väntevärdet av antalet steg till absorption när vi börjar i transient tillståndet s_i.
- $d_i = \sum_{j=1}^{t} n_{ij}$

Absorptionssannolikhet

- När $n \to \infty$ matrisen $\star$ går till matrisen NR och då

$$P^n \to \begin{pmatrix} 0 & NR \\ 0 & I_r \end{pmatrix}$$

- Så om man startar med det transienta tillståndet s_i så änder man i det absorberande tillståndet s_j med sannolikhet b_{ij} , där b_{ij} är element (i, j) från matrisen NR.

Exempel

Låt

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vara en övergångsmatris av en Markovkedja. Vi har

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad R = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Exempel

$$I - Q = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Alltså

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Om man börjar med tillstånd s_1 (första rad) förväntar man sig att det tar ett steg för att vara i tillstånd s_2 innan at det blir absorberat.

Exempel

$$Nc = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 01/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$ Om man börjar i tillstånd-det 1,2 och 3, är väntevärdet för att innan absorption 3,4 och 3 respektiv.

$$NR = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$ Om man börjar med tillstånd s_1 är sannolikhet att man blir absorberat i tillstånd s_4 3/4 och i tillståd s_5 1/4.