Absorberande markovkedjor

Definition 1. *En sekvens av stokastiska variabler $X_0, X_1, \ldots$ som antar värden i en ändlig mängd T är en (tidshomogen) markovkedja med övergångsmatris P_{ij}, $(i, j \in T)$ om*

1. $P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = a_{n-1}, X_{n-2} = a_{n-2}, \ldots, X_0 = a_0)$

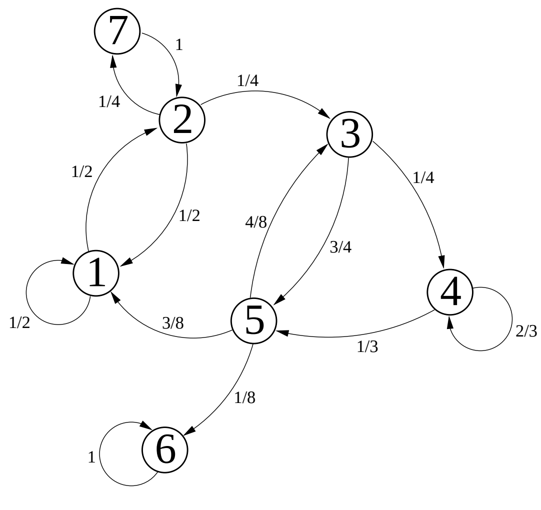
2. $P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P_{ij}$

Villkor 1 kallas för markovegenskapen, eller glömskegenskapen, och kan tolkas som att nästa tillstånd X_{n+1} enbart beror på nuvarande tillstånd X_n och inte av historien $X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots, X_0$. Villkor 2 innebär att sannolikheten för att nästa tillstånd är j givet att nuvarande tillstånd är i ges av P_{ij} (och är oberoende av tiden n, därav tidshomogen).

Ett absorberande tillstånd är ett tillstånd som vi aldrig kan lämna när vi väl hamnat i det:

Definition 2. *Ett tillstånd a är absorberande om $P_{aa} = 1$.*

Definition 3. *En markovkedja är absorberande om det från varje tillstånd är möjligt att (med sannolikhet > 0) nå ett absorberande tillstånd på ändlig tid.*



Figur 1: Ett exempel på en markovkedja med tillståndsrum $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Tillstånd 6 är ett s.k. absorberande tillstånd.

För en absorberande markovkedja kan man enkelt visa att kedjan till slut kommer att fastna i ett absorberande tillstånd. Om det finns flera absorberande tillstånd kan man då ställa sig frågan vilket tillstånd den kommer att fastna i, eller mer specifikt med vilken sannolikhet den kommer att fastna i ett givet tillstånd.

Sats 1 (Absorbtionssannolikheter). *Låt a vara ett absorberande tillstånd och låt*

$$q_i = P(\textit{kedjan absorberas i tillstånd } a \textit{ då man startar i tillstånd } i)$$

Då är

$$q_i = \begin{cases} 1 & \textit{om } i = a \\ 0 & \textit{om } i \textit{ är absorberande, men } i \neq a \\ \sum_k P_{ik} q_k & \textit{annars} \end{cases}$$

Bevis. Att $q_a = 1$ och att $q_i = 0$, om i är absorberande, men $i \neq a$, är uppenbart. Om i ej är absorberande får vi:

$$q_i = P(A|X_0 = i) = \frac{P(A, X_0 = i)}{P(X_0 = i)}$$

Genom att observera att händelserna $\{X_1 = k\}, k \in T$, är en partition av utfallsrummet (X_1 måste ju anta precis ett värde) får man:

$$q_i = \frac{\sum_k P(A, X_0 = i, X_1 = k)}{P(X_0 = i)} = \sum_k \frac{P(A|X_0 = i, X_1 = k)P(X_0 = i, X_1 = k)}{P(X_0 = i)}$$

Men markovegenskapen innebär att $P(A|X_0 = i, X_1 = k) = P(A|X_1 = k)$, ty A beror bara på det senast kända tillståndet X_1, så

$$q_i = \sum_k P(A|X_1 = k)P(X_1 = k|X_0 = i) = \sum_k q_k P_{ik}$$

$\square$

Obs: Formeln är egentligen väldigt enkel att förstå; om starttillståndet i inte är ett absorberande tillstånd så måste vi gå till ett närliggande tillstånd. Vi går till tillstånd k med sannolikheten P_{ik} och väl där är sannolikheten q_a att vi till slut fastnar i tillstånd a. q_i borde därför vara ett viktat medelvärde av q_k.

En annan intressant fråga är hur lång tid det tar innan vi fastnar i ett absorberande tillstånd. Det ger följande sats en uppfattning om:

Sats 2 (Tid till absorbtion). *Låt*

$$m_i = E[\textit{antal steg tills kedjan når ett absorberande tillstånd då man startar i tillstånd } i],$$

Då är

$$m_i = \begin{cases} 0 & \textit{om } i \textit{ är absorberande} \\ 1 + \sum_k P_{ik} m_k & \textit{annars} \end{cases}$$

Bevisidé. Ett ordentligt bevis blir krångligt med dom beteckningar vi har, men man kan resonera ungefär så här:

Om starttillståndet i inte är absorberande så måste vi ta minst 1 steg till (därav ettan). Då hamnar vi i ett nytt tillstånd k med sannolikheten P_{ik} och från tillstånd k är ju förväntat antal steg till absorbtion m_k. Förväntat antal steg från i bör därför bli 1 + ett viktat medelvärde av m_k. $\square$