Lösningar till tentamen i Matematisk statistik och diskret matematik D2 (MVE055/MSG810).
Den 28 augusti 2008.

1. Lösning:

$$f_y(y) = F'_Y(y) = \frac{3y^2+2}{12} \ , 0 \le y \le 2$$

$$\mathbf{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^2 \frac{3y^3+2y}{12} = \left[\frac{y^4}{16} + \frac{y^2}{12}\right]_0^2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

2. Lösning:

   a) Exp(5)
   b) Geom(0.5)
   c) Bin$(5, 1/6)$

3. Lösning:

   a) Det finns $\frac{1}{2}\binom{6}{3} = 10$ möjliga lagindelningar. Sannolikheten är alltså $\frac{1}{10}$.
   b) Låt X vara antalet spelare som byts ut i Kalles lag. Vi vet att $\mathbf{P}[X=0] = \frac{1}{10}$. Sannolikheten att Kalle hamnar i ett helt nytt lag är $\mathbf{P}[X=2] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$. Alltså är $\mathbf{P}[X=1] = \frac{6}{10}$ och $\mathbf{E}[X] = 1 \cdot \mathbf{P}[X=1] + 2 \cdot \mathbf{P}[X=2] = \frac{12}{10} = 1.2$.

4. Lösning:
   $\hat{p} = \frac{759}{1889} \approx 0.402$ ger konfidensintervallet

$$\hat{p} \pm z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \hat{p} \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{1889}} \approx 0.402 \pm 0.0221 \approx 40.2\% \pm 2.3\%$$

5. Lösning:
   Ett rimligt antagande är att hagelkornen faller enligt en Poisson-process med intensiteten 60 korn per kvadratmeter och sekund.

   Eftersom äpplet har en tvärsnittsarea om $\pi \cdot 0.02^2$ kvadratmeter kommer antalet korn X som träffar det att vara Poisson-fördelat med parameter
   $k = 60 \cdot 30 \cdot \pi \cdot 0.02^2 \approx 2.262$.

   Alltså blir $\mathbf{P}[X=0] = e^{-2.262} \approx 10.4\%$.

6. Lösning:

   a) $\mathbf{E}[4X - 5Y] = 4\mathbf{E}[X] - 5\mathbf{E}[Y] = 4 \cdot 3 - 5 \cdot (-5) = 37$
   b) $\mathbf{Cov}(X,Y) = \rho_{X,Y} \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y = 0.5\sqrt{4}\sqrt{16} = 4$
   c) $\mathbf{E}[X^2] = \mathbf{Var}\, X + (\mathbf{E}[x])^2 = 4 + 3^2 = 13$

7. Lösning:

a) Låt X kr vara spelbolagets förtjänst per satsad krona och oddset x. Då är

$$\mathbf{E}[X] = 0.02 \Leftrightarrow 1 - 0.75x = 0.02 \Leftrightarrow x = \frac{0.98}{0.75} \approx 1.3067$$

b) Vi har $\mathbf{E}[X] = 0.02$, $\mathbf{E}[X^2] = 0.25 \cdot 1^2 + 0.75 \cdot (1-x)^2 \approx 0.3205$ och $\sigma_X = \sqrt{\mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2} \approx 0.5658$.
Bolagets totala vinst blir $Y = 10000 \cdot X$ kr, alltså är $\mathbf{E}[Y] = 10000 \cdot \mathbf{E}[X] = 200$ samt $\sigma_Y = 10000 \cdot \sigma_X = 5658$

8. Lösning:

a) Låt $X_1, \ldots, X_{336} \sim \text{Norm}(\mu, \sigma)$ vara vikten (i gram) av de 336 bitarna i paketet. Då är paketets vikt

$$Y = \sum_{i=1}^{336} X_i \sim \text{Norm}(336 \cdot \mu, \sqrt{336} \cdot \sigma) \approx \text{Norm}(1001.28, 1.2831)$$

Så

$$\mathbf{P}[Y \leq 1000] = \mathbf{P}\left[\frac{Y - 1001.28}{1.2831} \leq \frac{-1.28}{1.2831}\right] \approx \phi(-0.9976) \approx 0.16 = 16\%$$

b) Konfidensintervallet ges av

$$\bar{x} \pm t_{0.025}\frac{s}{\sqrt{25}} \approx 3.01 \pm 2.064 \cdot \frac{0.050}{5} \approx 3.01 \pm 0.0206$$

c) Med 95% konfidens vet vi att $2.9894 \leq \mu \leq 3.0306$, dvs att $1004.4 \leq 336\mu \leq 1018.3$, vilket innebär att kravet är uppfyllt. Svar: Ja!

9. Lösning:
Tänk att vi drar en slumpmässig person som besvarat en enkäten och inför händelserna T={Personen säger sig trivas} och E={Personen har tidigare erfarenhet}
Vi vet att $\mathbf{P}[T] = 60\%$, $\mathbf{P}[E] = 40\%$ och $\mathbf{P}[T|E] = 2 \cdot \mathbf{P}[T|E^C]$. Totala sannolikhetslagen ger

$$\mathbf{P}[T] = \mathbf{P}[E]\mathbf{P}[T|E] + \mathbf{P}[E^C]\mathbf{P}[T|E^C] \Rightarrow 0.6 = 0.4 \cdot 2 \cdot \mathbf{P}[T|E^C] + 0.6 \cdot \mathbf{P}[T|E^C] \Rightarrow \mathbf{P}[T|E^C] = \frac{3}{7}$$

Bayes sats ger nu svaret,

$$\mathbf{P}[E^C|T^C] = \frac{\mathbf{P}[T^C|E^C]\mathbf{P}[E^C]}{\mathbf{P}[T^C]} = \frac{\left(1 - \frac{3}{7}\right) \cdot 0.6}{0.4} = \frac{6}{7} \approx 85.7\%$$