TENTAMEN: Matematisk statistik och diskret matematik (MVE055, MSN620), onsdagen den 11 januari 2006, kl. 14.00–18.00, V.
Jour: Marianne Månsson, tel 772 3545. Besöker tentamenssalen ca kl 15.30, 17.00.
Tillåtna hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare och Beta (eller kopior ur Beta).
Betygsgränser: 3a: 12 poäng, 4:a: 18 poäng, 5:a: 24 poäng.
Varje uppgift kan ge 3 poäng och maximalt antal poäng är 30.

1. Låt X och Y vara oberoende stokastiska variabler. X har väntevärde 5 och varians 3, medan Y har väntevärde 13 och varians 7.
   a) Beräkna väntevärde och varians för $X - Y + 3$.
   b) Beräkna väntevärde och standardavvikelse för $5X + Y/4$.
   c) Beräkna väntevärde för $X(3 + 2Y)$.

2. A och B är händelser med sannolikheterna $P(A) = 0.2$ och $P(B) = 0.15$. Beräkna $P(A \cup B)$ i följande fall:

   a) A och B är disjunkta.
   b) A och B är oberoende.
   c) B kan bara inträffa om A inträffar.

3. Gör ett 95 % konfidensintervall för andelen personer i en viss population som ej använder mössa trots att utetemperaturen är under 5 minusgrader med hjälp av följande data: i ett stickprov av storlek 100 hade 35 personer ingen mössa.

4. a) Formulera centrala gränsvärdessatsen.
   b) Visa att binomialfördelningen under vissa förutsättningar kan approximeras med en normalfördelning.

5. Anton har köpt en ny spis. Han tror att den nya spisen är snabbare än den gamla och för att testa om detta stämmer bestämmer sig Anton för att jämföra tiden för att koka upp 5 liter vatten. Han gjorde 30 försök med den nya spisen och 25 med den gamla och fick följande resultat: För det nya spisen var den genomsnittliga tiden till uppkok 3.9 min och stickprovsvariansen (s^2) 1.2 och för den gamla var motsvarande tider 4.6 och 1.3. Antag att stickproven är normalfördelade och att varianserna är lika. Formulera lämplig noll- och mothypotes och gör ett statistiskt test av skillnaden i förväntad tid tills uppkok. Välj signifikansnivå / förkastelsegräns själv.

6. Anna och Kalle försöker nå ett äpple som hänger 250 cm över marken. Antag att när Anna hoppar når hon en höjd som är normalfördelad med väntevärde 243 cm och standardavvikelse 4 cm. När Kalle hoppar när han en höjd som är normalfördelad med väntevärde 246 cm och standardavvikelse 3 cm.

   a) Vad är sannolikheten att Kalle får ner äpplet vid försök 1?
   b) Vad är sannolikheten att Kalle får ner äpplet först på fjärde försöket?

   c) Antag att Anna och Kalle bara får ett försök var. Vad är sannolikheten att någon av dem lyckas med att få ner äpplet.

7. Antag att man singlar en "rättvis" (sannolikhet 1/2 för varje sida) slant 3 gånger. Låt X vara 1 om man får bara får klave och 0 annars, och låt Y vara antal singlingar som ger krona.
   a) Bestäm den tvådimensionella frekvensfunktionen för (X, Y).
   b) Beräkna korrelationen mellan X och Y.

8. Priset på tyget till de nya gardinerna du vill sy är alldeles för högt och därför köper du andrasortering. Problemet med detta tyg är att det förekommer 0.5 fel per meter i genomsnitt och man får inte titta på tyget innan man köper det. Antag att felens förekomster följer en Poissonprocess.
   a) Vad är den förväntade längden till första felet.
   b) Antag att du behöver en hel 4 meters felfri bit. Vad är sannolikheten att du får det om du köper 4 meter?
   c) Nu visade det sig tyvärr att din 4-meters bit inte är felfri. Din kompis är inte så noga som du, utan tycker att tyget duger bara det inte är fler än 3 fel. Givet att tyget inte duger åt dig eftersom där förekommer fel, vad är sannolikheten att det duger åt din kompis?

9. En Markovkedja med tre tillstånd 1,2,3 har följande övergångsmatris

	1	2	3
1	0	1/4	3/4
2	1/2	1/2	0
3	0	0	1

   Vad är den förväntade tiden till absorbtion om man startar i tillstånd 1?

10. a) Skriv upp den genererande funktionen för a_n = antal sätt man kan fördela n stycken kronor bland 4 stycken barn om de ska få minst 3 kronor var, $n = 0, 1, 2, \ldots$.
    b) På hur många sätt kan pengarna delas upp om de får 20 kronor att dela på och de ska ha minst 3 kronor var?
    Du kan utnyttja att
$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n.$$

Lycka till!