TENTAMEN: Matematisk statistik och diskret matematik IT (MVE050)
Tid och plats: Tisdagen den 10 april 2007, kl. 14.00–18.00, VV-salar.
Jour: Marcus Isaksson, tel 0708-527663. Besöker tentamenssalen ca kl 15.30, 17.00.
Tillåtna hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare och Beta.
Betygsgränser: 3: 12 poäng, 4: 18 poäng, 5: 24 poäng. Maximalt antal poäng är 30.

1. (3p) En tygpåse innehåller fyra lotter, varav två är vinstlotter och två är nitlotter. Du drar lotter på måfå tills du får en vinstlott (nitlotter slängs och läggs inte tillbaka i påsen). Vad är det förväntade antalet lotter du behöver dra innan du får en vinstlott?

2. (4p) Födelsevikten hos nyfödda i Sverige kan antas vara normalfördelad med väntevärde 3525 gram och standardavvikelse 510 gram. Vad är:

   a) sannolikheten att det första barnet som föds imorgon väger mer än 4 kg?
   b) sannolikheten att de 10 första barnen som föds imorgon har en medelvikt på över 4 kg?

3. (4p) I syfte att utreda marknadsandelen för det nya revolutionerande operativsystemet **Chalmux** tillfrågades 7000 studenter vilket operativsystem som de ansåg sig använda mest. 138 svarade att de använde **Chalmux** mest. Ett halvår senare upprepades samma undersökning och denna gång svarade 157 studenter att de använde **Chalmux** mest.

   a) Ange ett 95%-igt konfidensintervall för ökningen av andelen studenter som mest använder **Chalmux**.
   b) Kan du baserat på intervallet dra slutsatsen (med 95% konfidens) att andelen studenter som mest använder **Chalmux** har ökat?

4. (3p) Föreningen för udda personer försöker visa att personer födda på udda dagar (dvs 1:a, 3:e, 5:e osv. i någon månad) är smartare än personer födda på jämna dagar. För att undersöka detta använder de ett intelligenstest som är kalibrerat så att resultatet på testet är normalfördelat med väntevärdet $\mu = 100$ och standardavvikelsen $\sigma = 15$ (för personer mellan 18 och 67 år). De antar att resultatet för udda personer har samma standardavvikelse men ett eventuellt annorlunda väntevärde μ_{udda}. Genom att testa $n = 100$ slumpmässigt utvalda udda personer (mellan 18 och 67 år) och räkna fram deras snittresultat $\bar{X}$ får de fram ett 90%-igt konfidensintervall för μ_{udda}:

   $$I = (\bar{X} - z_{0.1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty)$$

   Om I inte innehåller $\mu = 100$ drar de slutsatsen att udda personer är smartare.

   Anta nu att de i avsikt att öka chanserna att komma fram till just denna slutsats bestämmer sig för att låta 10 olika institut genomföra ovanstående undersökning helt oberoende av varandra och om minst ett av dessa kommer fram till slutsatsen att udda personer är smartare så publicerar de enbart den rapporten och gömmer övriga rapporter längst in i källaren.

   Vad är sannolikheten att minst ett institut kommer fram till slutsatsen att udda personer är smartare om det faktiskt inte är någon skillnad, dvs $\mu_{\text{udda}} = 100$?

5. (3p) Ett visst dna-test där dna från ett hårstrå jämförs med dna från saliv anses ge rätt resultat med 99.9999% sannolikhet, dvs om dna:et härstammar från samma person så ger testet positivt utslag med sannolikheten 99.9999% och om dna:et inte härstammar från samma person så ger testet positivt utslag med sannolikheten 0.0001%.

   Ett mord har begåtts och ett hårstrå som hittats på ett mordoffer jämförs med en slumpmässigt utvald svensk medborgare X. Om testet visar positivt utslag, vad är då den betingade sannolikheten att X är mördaren?

   Anta att det faktiskt är en svensk medborgare (1 av 9.12 miljoner) som har utfört mordet och att det är dennes hårstrå som återfunnits.

6. (3p) Du kastar en sexsidigt tärning om och om igen tills du får två sexor i följd.
   Låt Y vara antalet kast som krävs. Vad är $\mathrm{E}[Y]$?

7. (3p) Fel i minneskretsar orsakad av kosmisk strålning kan modelleras som en poissonprocess. Anta att felintensiteten för internminnet i din nya laptop är 1 fel på 10 år. Du planerar att använda datorn under 6 år. De första 3 åren som din primära dator och de följande 3 åren som filserver och undrar därför:

   a) Vad är sannolikheten att minst 1 fel uppstår under de första 3 åren?
   b) Vad är sannolikheten att det dröjer mellan 3 och 6 år innan det första felet uppstår?

8. (3p) Anna vill veta hur många abborrar det finns i en viss sjö. För att göra det plockar hon upp 10 abborrar, märker dem och återplacerar dem i sjön. Sedan börjar hon återigen fiska. Om och om igen plockar hon upp en abborre, tittar på den och återplacerar den. När hon hittar en abborre som är märkt avbryter hon och låter X vara antalet fiskar som hon har plockat upp och tittat efter märkning på. X kan alltså anta värdena $1, 2, 3,$ osv.

   a) Låt n vara det totala antalet abborrar i sjön. Visa att $\hat{n} = 10X$ är en väntevärdesriktig skattare för n.
   b) Vad är $\operatorname{Var} \hat{n}$?

   Obs: Du kan anta att varje abborre är lika sannolik att bli upplockad vid varje tillfälle och att den abborre som plockas upp vid varje tillfälle är oberoende av vilka som plockats upp tidigare.

9. (4p) Anta att $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ är oberoende och likformigt fördelade på intervallet $[0, 2]$. Vad är (approximativt) sannolikheten att summan $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ är mindre än 90?

Lycka till!