Lösningar till tentamen i Matematisk statistik och diskret matematik D2 (MVE055/MSG810).
Den 21 oktober 2008.

1. Lösning:
   $\mathbf{E}[X] = 12 \cdot 0.2 = 2.4$, $\mathbf{Var}[X] = 2 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 1.92$ och $\mathbf{E}[Y] = \mathbf{Var}[Y] = 5$.

   a) $\mathbf{E}[X - 2Y] = \mathbf{E}[X] - 2\mathbf{E}[Y] = 2.4 - 10 = -7.6$
   b) $\mathbf{E}[Y^2] = \mathbf{Var}[Y] + (\mathbf{E}[Y])^2 = 5 + 5^2 = 30$
   c) $\mathbf{Var}\left[\frac{X+Y}{2}\right] = \frac{\mathbf{Var}[X]+\mathbf{Var}[Y]}{4} = \frac{1.92+5}{4} = 1.73$

2. Lösning:
   Låt X vara antal kast tills någon får en sexa. Då är $X \sim \mathrm{Geom}(\frac{1}{6})$ och
   $\mathbf{P}(\text{Alice vinner}) = \mathbf{P}(\{X = 1\} \cup \{X = 4\} \cup \dots) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}(X = 1 + 3i) =$
   $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3i} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^i = \frac{1}{6} \frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{36}{91}$

3. Lösning:

   a) $\mathbf{E}[X] = 1 \cdot a + 2 \cdot 2a + 3 \cdot 3a + 4 \cdot (1 - 6a) = 4 - 10a$
   b) Händelserna är oberoende $\iff \mathbf{P}(X \text{ är udda}, X \geq 3) = \mathbf{P}(X \text{ är udda}) \cdot \mathbf{P}(X \geq 3) \iff 3a = 4a(1 - 3a) \iff 12a^2 - a = 0 \iff a = 0$ eller $a = \frac{1}{12}$.
   c) $\frac{1}{3} = \mathbf{P}(X \text{ är udda } | X \geq 2) = \frac{\mathbf{P}(X \text{ är udda }, X \geq 2)}{\mathbf{P}(X \geq 2)} = \frac{\mathbf{P}(X=3)}{\mathbf{P}(X \geq 2)} = \frac{3a}{1-a} \iff$
   $1 - a = 9a \iff a = \frac{1}{10}$

4. Lösning:

   a) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$
   b) Låt tillstånden $1, 2, 3, 4$ resp. 5 stå för att deltagare som ska svara på nästa fråga har $100, 1000, 10000, 100000$ resp. att någon redan har vunnit en miljon. Vi har då en Markovkedja med 5 som absorberande tillstånd. Låt
   $m_i = \mathbf{E}[\text{antal steg tills tillstånd 5 nås om vi börjar i tillstånd } i]$. Då är
   $m_5 = 0$
   $m_4 = 1 + \frac{2}{3}m_1 + \frac{1}{3}m_5 = 1 + \frac{2}{3}m_1$
   $m_3 = 1 + \frac{2}{3}m_1 + \frac{1}{3}m_4 = \frac{4}{3} + \frac{8}{9}m_1$
   $m_2 = 1 + \frac{2}{3}m_1 + \frac{1}{3}m_3 = \frac{13}{9} + \frac{26}{27}m_1$
   $m_1 = 1 + \frac{2}{3}m_1 + \frac{1}{3}m_2 = \frac{40}{27} + \frac{80}{81}m_1 \iff \frac{1}{81}m_1 = \frac{40}{27} \iff m_1 = 120$

5. Lösning:
   Låt X vara antalet som svarar obama och $\hat{p} = \frac{X}{n}$, där $n = 150$. Om ett dubbelsidigt konfidensintervall används så kan slutsatsen dras omm

   $$\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} > 0.5$$

   dvs

   $$X - 1.96\sqrt{X(1 - \frac{X}{150})} > 75$$

   Genom prövning fås att $X = 87$ är det minsta värdet som uppfyller olikheten.

6. Lösning:
   Låt $X_1, \ldots, X_{100}$ vara livslängden för respektive hårddisk. Då är $X_i \sim \text{Exp}(3)$, $\mathbf{E}[X_i] = 3$ och $\sigma_{X_i} = 3$. Medellivslängden $\overline{X}$ är approximativt $\text{Norm}(3, \frac{3}{\sqrt{100}}) = \text{Norm}(3, 0.3)$. Alltså är

$$\mathbf{P}(\overline{X} > 3.5) = \mathbf{P}\left(\frac{\overline{X} - 3}{0.3} > \frac{0.5}{0.3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0.5}{0.3}\right) \approx 1 - 0.9525 = 4.75\%$$

7. Lösning:

   a) Då $n = 30$ kan $\overline{X}$ antas vara approximativt normalfördelad. Ett 95%-igt konfidensintervall för väntevärdet ges då av $\overline{X} \pm t_{0.025}(29)\frac{s}{\sqrt{30}}$. I vårt fall blir intervallet $\bar{x} \pm 2.045 \cdot \frac{56}{\sqrt{30}} \approx 10$ min 38 s ± 21 s
   b) Hela intervallet ska ligga över 10 minuter, vilket det gör. Alltså har Kalle rätt.

8. Lösning:
   Fördelningsfunktionen är

$$F_X(x) = 1 - e^{\lambda x}, x \geq 0$$

   så för $x \geq 0$ gäller

$$\mathbf{P}(X > x) = 1 - \mathbf{P}(X \leq x) = e^{-\lambda x}$$

   Alltså är

$$\mathbf{P}(X > t | X > s) = \frac{\mathbf{P}(X > t)}{\mathbf{P}(X > s)} = \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda(t-s)} = \mathbf{P}(X \geq t - s)$$

9. Lösning:
   Låt a_n vara antalet sätt att dela upp n guldmynt. Då är den genererande funktionen för a_n blir:

$$A(x) = \left(x^5 + \cdots + x^{20}\right)^5 = \left(\frac{x^5 - x^{21}}{1 - x}\right)^5 = \left(x^5 - x^{21}\right)^5 \left(\frac{1}{1 - x}\right)^5 = \left(x^5 - x^{21}\right)^5 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{4 + k}{k} x^k$$

   Svaret blir koefficienten framför x^{50}, dvs

$$a_{50} = \binom{4 + 25}{25} - 5\binom{4 + 9}{9} = 20176$$