Penney's game

Penney's game går till på följande sätt: två spelare som vi kallar A och B kommer först överens om ett heltal $k \geq 3$. Därefter bestämmer sig A för en sekvens av längd k bestående av krona (T) och klave (H). Denna sekvens visas för B som därefter får bestämma en sekvens av längd k. (Exempelvis $k = 4$, A:s sekvens = HTTH, B:s sekvens = TTHT.) Därefter singlas ett rättvist mynt tills en av de valda sekvenserna dyker upp som en följd; den spelare vars följd först dyker upp vinner. Är detta ett rättvist spel, dvs. har spelarna lika stor chans att vinna? Det är vad som ska undersökas i det här grupparbetet.

1. Spela Penney's game med varandra några gånger. Verkar det vara ett rättvist spel, dvs. att alla sekvenser har lika stor sannolikhet att vinna?

2. Nu lämnar vi spelet en stund och studerar en sekvens i taget. Antag att man singlar en slant 100 gånger. Låt X_S beteckna antalet gånger en viss sekvens S dyker upp.

   (a) Antag att S har längden 4. Förklara varför X_S kan skrivas som $X_S = I_1 + I_2 + \cdots I_{97}$, där $I_i = 1$ om singlingarna $i, i+1, \ldots, i+3 = S$, och 0 annars.

   (b) Beräkna $E[X_S]$ för några olika S.

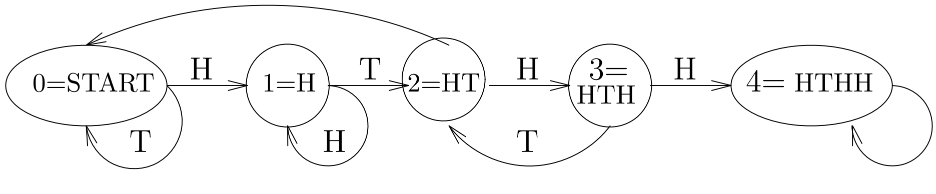
   (c) Tror ni nu att det är ett rättvist spel?

3. För en given sekvens av längd k bestående av H och T kan man konstruera en markovkedja som illustrerar singlandet tills dess sekvensen dyker upp för första gången. Låt tillstånden vara:
   0 = START,
   1 = bokstav 1 i sekvensen,
   2 = bokstav 1 och 2 i sekvensen,
   $\vdots$
   k = hela sekvensen.

   Vi börjar i tillstånd 0, och för varje singling förflyttar vi oss till ett annat tillstånd så att vi är i:

   - tillstånd k om hela sekvensen har dykt upp, annars i
   - tillstånd j, för $j = 0 \ldots k-1$, om de j senaste singlingarna motsvarar början av sekvensen, medan de $j+1$ senaste singlingarna inte gör det.

   Det visar sig (övertyga dig om det!) att nästa tillstånd enbart beror på nuvarande tillstånd samt nästa singling vilket gör att vandringen mellan tillstånden kan beskrivas av en markovkedja. I figuren nedan visas markovkedjan i fallet HTHH. Varje pil motsvarar utfallet av en singling, dvs. H eller T, och har sannolikheten 1/2 (förutom den sista pilen som har sannolikhet 1).



   Kedjan kommer att nå det absorberande tillståndet k precis samtidigt som den valda sekvensen dyker upp för första gången i singlandet.

   Rita motsvarande figur för sekvenserna HTHT och THTT.

4. Låt övergångssannolikheterna mellan tillstånden i en markovkedja betecknas med $P_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$, och låt

$$m_i = E[\text{antal steg tills kedjan når ett absorberande tillstånd då man startar i } i],$$

Man kan visa att

$$m_i = \begin{cases} 0 & \text{om } i \text{ är absorberande} \\ 1 + \sum_k P_{ik} m_k & \text{annars} \end{cases}$$

   (a) Låt N_A vara antalet singlingar tills sekvensen A dyker upp. Utnyttja figurerna och detta resultat för att beräkna $E[N_A]$ och $E[N_B]$, där A=HTHT och B=THTT. Välj gärna några egna sekvenser också.

   (b) Vilken av sekvenserna HTHT och THTT tror ni vinner, dvs. kommer först, med tanke på resultaten ovan?

5. På liknande sätt som ovan kan man konstruera en markovkedja för två sekvenser. Det finns då två absorberande tillstånd, ett för varje sekvens; det tillstånd som kedjan fastnar i är den sekvens som dykt upp först. Gör en sådan kedja för HTHT och THTT.

6. Om en markovkedja har flera absorberande tillstånd kan vi räkna ut sannolikheten att kedjan absorberas i ett specifikt absorberande tillstånd (den kommer alltid absorberas i något absorberande tillstånd).

   Låt a vara ett absorberande tillstånd och låt $q_i = P$(kedjan absorberas i tillstånd a då man startar i tillstånd i). Då gäller att

$$q_i = \begin{cases} 1 & \text{om } i = a \\ 0 & \text{om } i \text{ är absorberande, men } i \neq a \\ \sum_k P_{ik} q_k & \text{annars} \end{cases}$$

   Beräkna sannolikheten att HTHT vinner över THTT med hjälp av denna ekvation. Pröva gärna med egna sekvenser.

Frivilliga uppgifter

7. Studera spelet för andra och gärna längre sekvenser. Räkna exakt enligt ovan eller simulera. Försök hitta en strategi för hur spelare B ska välja sin sekvens. Tips: tänk på A=HHHH B=THHH. I vilka fall vinner A?

8. Studera de tre sekvenserna A=HTHT, B=THTT och C=HTTH. Skatta sannolikheten att A vinner över B, att B vinner över C, och att C vinner över A, med hjälp av simulering. Låt sedan alla tre sekvenserna tävla mot varandra, och skatta sannolikheterna att A, B och C vinner. Kommentera resultatet.

Sista inlämningsdag 28/9.