TENTAMEN: Matematisk statistik IT (TMS155), tisdagen den 24 augusti 2004, kl. 8.45–12.45, V-huset.
Jour: Marianne Månsson, telefon 772 35 45.
Tillåtna hjälpmedel: Typgodkänd räknare och Beta.
Varje uppgift kan ge 3 poäng.

1. a) Ge exempel på något som är binomialfördelat, geometriskt fördelat respektive (approximativt) normalfördelat.

   b) Ange även dessa fördelningars frekvens/täthetsfunktioner samt väntevärden och varianser.

2. Antag att mätfelet i kilo hos en våg är en stokastisk variabel X med täthetsfunktion $f(x) = x^2/3$ om $-1 < x < 2$, och 0 för övrigt.
   a) Visa att $f(x)$ verkligen är en täthetsfunktion.
   b) Vad är sannolikheten att vågen visar högst ett halvt kilo fel?
   c) Vad är det förväntade felet?

3. Antag att $P(Y = 2) = 1/4$ samt att X och Y är oberoende. Använd detta för att fylla i de värden som saknas i tabellen nedan över frekvensfunktionen för den tvådimensionella stokastiska variabeln (X, Y):

		X		
		0	3	6
Y	1	?	?	?
	2	0.1	0.05	?

4. a) Definiera kovarians och oberoende mellan två diskreta stokastiska variabler.
   b) Visa att kovariansen mellan X och Y är 0 om X och Y är oberoende och diskreta.
   Föredrar du att lösa uppgiften för kontinuerliga stokastiska variabler går det bra.

5. Antag att du vill skatta väntevärdet av tiden det tar att koppla upp sig på nätet för din dator. Antag att du observerar tiden vid 40 stycken uppkopplingar och får medelvärdet 42 sekunder och stickprovsstandardavvikelsen 5.2 sek (dvs. $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2} = 5.2$). Ange ett 95 % konfidensintervall för väntevärdet.

6. Ett läkemedelsföretag har tagit fram ett nytt läkemedel mot högt blodtryck. Man påstår att detta läkemedel är effektivare än ett annat som är vanligt på marknaden, och som anses fungera bra för 60 % av patienterna. För att styrka detta påstående testar man det nya läkemedlet på 100 personer med högt blodtryck. Av dessa visar det sig att blodtrycket sänktes till en önskad nivå för 70 stycken. Utför ett lämpligt test för att undersöka om man kan dra slutsatsen att det nya läkemedlet är bättre än den gamla.

7. Antag att du har n stycken observationer på en Poissonfördelad stokastisk variabel med parameter λ. Härled maximum likelihoodskattningen (trolighetsskattningen) av λ.

8. Den så kallade glömskeegenskapen eller minneslösheten hos exponentialfördelade stokastiska variabler säger att

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t),$$

för alla $s, t \geq 0$, om X är exponentialfördelad.
a) Visa att glömskeegenskapen gäller.
b) Motivera begreppet glömskeegenskap. Tips: exponentialfördelningen används ofta till att modellera livslängden hos olika komponenter.
(I själva verket är det så att glömskeegenskapen endast gäller om X är exponentialfördelad, men det är svårare att visa och ingår ej i uppgiften.)

9. Antag att David kastar pil på en cirkulär piltavla med radien 25 cm. Om avståndet från pilen han kastar till mittpunkten är mindre än 5 cm vinner han 10 kronor, om avståndet är mellan 5 och 10 cm vinner han 5 kronor, om det är mellan 10 och 25 vinner han ingenting, och hamnar pilen utanför tavlan får han betala 20 kronor. Om David kastar pilen så att avståndet från pilen till tavlans mittpunkt är likformigt fördelat mellan 0 och 30 cm, vad är då hans förväntade vinst?

10. a) Antag att en CD-spelare har en livslängd som kan antas vara normalfördelad med väntevärde 5000 timmar och varians 10000 (tim^2). Vad är sannolikheten att CD-spelarens livslängd överskrider 5100 timmar?
b) Antag vidare att du har 500 batterier vars livslängder är oberoende, exponentialfördelade med förväntad livslängd 10 timmar. Vad är sannolikheten (approximativt) att batteriernas sammanlagda livslängd överskrider 5100 timmar?
c) Om CD-spelaren drivs av ett batteri av ovan nämnda typ, vad är då sannolikheten (approximativt) att CD-spelaren inte kan användas pga att batterierna tar slut (dvs. batterierna tar slut före CD-spelaren går sönder)?

Lycka till!