

TENTAMEN: Matematisk statistik och diskret matematik (MVE050, MSN620), fredagen den 16 december 2005, kl. 8.30–12.30, M.

Jour: Marcus Isaksson, tel 0708-527663. Besöker tentamenssalen ca kl 10.00, 11.30.

Tillåtna hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare och Beta (eller kopior ur Beta).

Betygsgränser: 3a: 12 poäng, 4:a: 18 poäng, 5:a: 24 poäng.

Varje uppgift kan ge 3 poäng och maximalt antal poäng är 30.

1. Låt X och Y vara oberoende stokastiska variabler. X har väntevärde 5 och varians 3, medan Y har väntevärde 13 och varians 7.
 - a) Beräkna väntevärde och varians för $X + Y - 5$.
 - b) Beräkna väntevärde och standardavvikelse för $3X - 2Y$.
 - c) Beräkna väntevärde för $X(1.5 + Y)$.
2. A och B är händelser med sannolikheterna $P(A) = 0.35$ och $P(B) = 0.1$. Beräkna $P(A \cup B)$ i följande fall:
 - a) A och B är disjunkta.
 - b) A och B är oberoende.
 - c) B kan bara inträffa om A inträffar.
3. Gör ett 99 % konfidensintervall för andelen personer i en viss population som ej köpt några julklappar 5e december med hjälp av följande data: i ett stickprov av storlek 100 hade 28 personer inte köpt några julklappar.
4. En fläkt har enligt fabrikantens uppgift en förväntad ljudnivån på 23 dB vid högsta effekt. Variansen är 4.8 dB^2 . Tillåten gräns för ljudnivån inomhus ligger på 30dB.
 - a) Bestäm en övre gräns för sannolikheten att ljudnivån från en slumpmässigt vald fläkt avviker mer än 7 dB från sitt väntevärde.
 - b) Efter en noggrannare undersökning kompletterar fabrikanten informationen med att ljudnivån är normalfördelad. Utnyttja denna information för att beräkna sannolikheten att ljudnivån från en slumpmässigt vald fläkt överstiger bullergränsen?
5. Anton har köpt en ny spis och vill se om den nya spisen är snabbare än den gamla. För att testa detta bestämmer sig Anton för att jämföra tiden för att koka upp 5 liter vatten. Han gjorde 20 försök med den nya spisen och 25 med den gamla och fick följande resultat: För den nya spisen var den genomsnittliga tiden till uppkok 5.9 min och stickprovsvariansen (s^2) 3.23 och för den gamla var motsvarande tider 8.7 och 2.91. Antag att stickproven är normalfördelade och att varianserna är lika och gör ett konfidensintervall för skillnaden i förväntad tid tills uppkok. Välj konfidensgrad själv.

6. Anna och Kalle försöker nå ett äpple som hänger 245 cm över marken. Antag att när Anna hoppar når hon en höjd som är normalfördelad med väntevärde 239 cm och standardavvikelse 4 cm. När Kalle hoppar når han en höjd som är normalfördelad med väntevärde 241 cm och standardavvikelse 3 cm.
- Vad är sannolikheten att Kalle får ner äpplet vid försök 1?
 - Vad är sannolikheten att Kalle får ner äpplet först på femte försöket?
 - Antag att Anna och Kalle bara får ett försök var. Vad är sannolikheten att någon av dem lyckas med att få ner äpplet.
7. Antag att man kastar en 6-sidig symmetrisk tärning 2 gånger. Låt X vara antal ettor och Y antal kast som ger ett jämnt antal prickar.
- Bestäm den tvådimensionella frekvensfunktionen för (X, Y) .
 - Beräkna korrelationen mellan X och Y .
8. Priset på tyget till de nya julgardinerna du vill sy är alldeles för högt och därför köper du andrasortering. Problemet med detta tyg är att det förekommer 0.3 fel per meter i genomsnitt och man får inte titta på tyget innan man köper det. Antag att felens förekomster följer en Poissonprocess.
- Vad är den förväntade längden till första felet.
 - Antag att du behöver en hel 3 meters felfri bit. Vad är sannolikheten att du får det om du köper 3 meter?
 - Nu visade det sig tyvärr att din 3-meters bit inte är felfri. Din kompis är inte så noga som du, utan tycker att tyget duger bara det inte är fler än 3 fel. Givet att tyget inte duger åt dig eftersom där förekommer fel, vad är sannolikheten att det duger åt din kompis?
9. En Markovkedja med tre tillstånd 1,2,3 har följande övergångsmatris

	1	2	3
1	0	1/3	2/3
2	0	1	0
3	1/2	0	1/2

Vad är den förväntade tiden till absorption om man startar i tillstånd 1?

10. a) Skriv upp den genererande funktionen för $a_n =$ antal sätt man kan fördela n stycken kronor bland 3 stycken barn om de ska få minst 5 kronor var, $n = 0, 1, 2, \dots$
- b) På hur många sätt kan pengarna delas upp om de får 30 kronor att dela på och de ska ha minst 5 kronor var?

Du kan utnyttja att

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n.$$

Lycka till!