

TENTAMEN: Matematisk statistik och diskret matematik D2 (MVE055/MSG810)

Tid och plats: Tisdagen den 23 oktober 2007, kl. 14.00–18.00, VV-salar.

Jour: Marcus Isaksson, tel 0708-527663. Besöker tentamenssalen ca kl 15.30, 17.00.

Tillåtna hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare och Beta.

Betygsgränser: 3: 12 poäng, 4: 18 poäng, 5: 24 poäng. Maximalt antal poäng är 30.

- (3p) Du vill undersöka andelen flickor bland nyfödda barn i Sverige. Anta att varje barn som föds är en flicka med sannolikheten p och en pojke med sannolikheten $1 - p$ oberoende av alla andra barn som fötts. Anta dessutom att p är ett tal som inte förändras över tiden.
Under 2006 föddes totalt 105 913 barn i Sverige. Av dessa var 51 430 flickor. Använd denna data för att skapa ett 95%-igt konfidensintervall för p .
- (3p) En välblandad kortlek bestående av två röda och fyra svarta kort ligger framför dig på bordet (med den sida som avslöjar färgen nedåt). Du drar ett kort i taget (och placerar det i handen) tills dess att du har två likafärgade kort på handen. Vad är det förväntade antal kort du behöver dra?
- (3p) Anta att du kastar en ideal sexsidig tärning och modellerar kastet med utfallsrummet $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ där varje utfall är lika sannolikt.
Låt $A = \{5, 6\}$ vara händelsen att du slår minst fem och ange i följande fall en händelse B som är sådan att:
 - B är oberoende av A
 - $P(A|B) = \frac{1}{2}$
 - $P(A \cup B) = 1$ och $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$
- (5p) 2-logaritmen av vikten i gram (kort: \log_2 -vikten) av fullt utvecklade arbetsbin i ett bisamhälle kan antas vara normalfördelad¹. Du mäter \log_2 -vikten hos 10 slumpmässigt utvalda bin och noterar ett stickprovsmedelvärde $\bar{x} = -3.12$ (vilket motsvarar en vikt på $2^{-3.12} \approx 0.115$ g) och en stickprovsstandardavvikelse $s = 0.140$. Ange 90%-iga konfidensintervall för:
 - Den genomsnittliga \log_2 -vikten i bisamhället.
 - Den genomsnittliga vikten (i gram) i bisamhället.
 - Standardavvikelsen för \log_2 -vikten i bisamhället.
- (3p) En diskret stokastisk variabel X har den momentgenererande funktionen

$$m_x(t) = \frac{2 + e^t + e^{2t}}{4}, \quad -\infty < t < \infty$$

Vad är $\text{Var } X$?

- (3p) På ett rättvist men något enformigt kasino finns ett spel som ger dig 1000 kr i vinst med sannolikheten $\frac{1}{2}$ och 1000 kr i förlust med sannolikheten $\frac{1}{2}$, oberoende av huruvida tidigare spel har gett vinst eller ej. Du spelar 1000 gånger. Vad är (approximativt) sannolikheten att du vinner eller förlorar mer än 100 000 kr ?

¹Att vikt och längd hos djur snarare följer en s.k. lognormal fördelning än en vanlig fördelning kan observeras via mätningar men också förklaras med hjälp av central gränsvärdesatsen då vikten approximativt kan ses som en produkt av slumpmässiga faktorer (celldelningar).

7. (3p) Anta att $X = Y$. Visa att $\text{Cov}(X, Y) = \text{Var } X$.
8. (3p) Kalles epost-konto innehåller en mapp för skräppost. I den hamnar automatiskt all epost som servern anser vara skräp. Kalle uppskattar att det trillar in 120 mail om dagen i skräppostmappen och att av dessa är 1% sådana mail som han egentligen skulle vilja läsa.

Låt oss modellera strömmen av mail till skräppostmappen som en poissonprocess med intensiteten 120 mail/dygn. Varje mail antas dessutom vara felaktigt sorterat med sannolikheten 1% oberoende av huruvida tidigare inkomna mail var felaktigt sorterade.

Kl. 14.00 imorgon har Kalle tänkt rensa skräppostmappen för att därefter observera vad som händer.

- a) Vad är sannolikheten att mappen fortfarande är tom kl. 15.00?
- b) Låt Y vara antalet mail i skräppostmappen när det första felaktigt sorterade mailet har hamnat där. Vad är $E[Y]$ och standardavvikelsen σ_Y ?
9. (4p) Hårddiskar av en viss modell antas ha exponentialfördelad livslängd. Den förväntade livslängden är normalt 30 år, men ett produktionsfel som drabbar 20% av de tillverkade diskarna sänker den förväntade livslängden för de drabbade diskarna till endast 2 år.

Du har köpt en hårddisk av den aktuella modellen och den fungerar fortfarande efter 3 års tid. Vad är sannolikheten att din hårddisk är en av de drabbade?

Lycka till!