TENTAMEN: Matematisk statistik och diskret matematik D (MVE055/MSG810)
Tid och plats: Tisdagen den 21 oktober 2008, kl. 08.30–12.30, VV-salar.
Jour: Marcus Isaksson, tel 0708-527663. Besöker tentamenssalen ca kl 10.00, 11.30.
Tillåtna hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare och Beta.
Betygsgränser: 3: 12 poäng, 4: 18 poäng, 5: 24 poäng. Maximalt antal poäng är 30.

1. (3p) Anta $X \sim \text{Bin}(12, 0.2)$ och $Y \sim \text{Poi}(5)$, samt att X och Y är oberoende. Beräkna
   a) $\mathbf{E}[X - 2Y]$
   b) $\mathbf{E}[Y^2]$
   c) $\mathbf{Var}\left[\frac{X+Y}{2}\right]$

2. (3p) Alice, Bob och Eva turas om att kasta en (ideal) tärning. Den som först får en sexa vinner. De kastar i ordningen Alice,Bob,Eva,Alice,.... Vad är sannolikheten att Alice vinner?

3. (3p) Anta att $X = \begin{cases} 1 & \text{m.s.} \quad a \\ 2 & \text{m.s.} \quad 2a \\ 3 & \text{m.s.} \quad 3a \\ 4 & \text{m.s.} \quad 1-6a \end{cases}$, där $0 \leq a \leq \frac{1}{6}$ är en konstant.
   a) Beräkna $\mathbf{E}[X]$.
   b) Välj a så att händelserna $\{X \text{ är udda}\}$ och $\{X \geq 3\}$ är oberoende.
   c) Välj a så att $\mathbf{P}(X \text{ är udda } | X \geq 2) = \frac{1}{3}$.

4. (4p) I ett frågeprogram på TV börjar deltagaren med 100kr och får en fråga. Om deltagaren svarar rätt så tiofaldigas beloppet och en ny fråga ställs. Efter fyra korrekta svar får deltagaren gå hem med en miljon kronor. Vid felaktigt svar åker deltagaren istället ur tävlingen och en ny deltagare tar plats och börjar om på 100kr.

   Anta att alla deltagare besvarar varje fråga rätt med sannolikheten $\frac{1}{3}$ och fel med sannolikheten $\frac{2}{3}$, oberoende av vad som hänt tidigare. Vad är
   a) Sannolikheten att den första deltagaren vinner en miljon?
   b) Väntevärdet av det totala antalet frågor som måste ställas innan någon vinner en miljon? (Om t.ex. den första deltagaren svarar fel på tredje frågan, och den andra deltagaren sen klarar alla sina frågor så har alltså 3+4=7 frågor ställts totalt)

5. (4p) I en amerikansk opionionsundersökning planeras 150 slumpmässigt utvalda personer få ta ställning till om de föredrar Obama eller McCain som president.

   Vad är det minsta antalet som måste svara Obama för att vi baserat på undersökningen med 95% konfidens ska kunna dra slutsatsen att fler föredrar Obama?

6. (3p) En serverhall innehåller 100 hårddiskar. Varje hårddisk går sönder efter en exponentialfördelad tid med väntevärde 3 år, oberoende av varandra. Vad är (approximativt) sannolikheten att medellivslängden hos de 100 hårddiskarna kommer överstiga 3.5 år?

7. (4p) Kalle åker varje morgon spårvagn 7 från centralstationen till Chalmers. Enligt tidtabellen ska det ta 9 minuter. Kalle är dock skeptisk till att detta ens kan stämma i snitt, även om värdet i tidtabellen kan anses vara snittet avrundat nedåt till närmaste hel minut. Han mäter därför noggrant alla tider $x_1, \ldots, x_{30}$ under 30 dagar och får stickprovsmedelvärdet $\bar{x} = 10$ min 38 s samt stickprovsstandardavvikelsen $s = 56$ s. Han har också observerat att fördelningen inte ser ut komma från en normalfördelning.

   a) Beräkna ett (approximativt) 95%-igt konfidensintervall för fördelningens väntevärde.
   b) Hur ska konfidensintervallet se ut för att du ska kunna dra slutsatsen att väntevärdet är minst 10 minuter? Vilken slutsats kan du dra baserat på svaret i a) ?

8. (3p) Anta att X är exponentialfördelad. Visa att

$$\mathbf{P}(X > t | X > s) = \mathbf{P}(X > t - s)$$

   för alla $t \geq s \geq 0$.

9. (3p) Fem sjörövare förhandlar om uppdelningen av en skatt bestående av 50 identiska guldmynt. Hittills har de bara lyckats enas om att ingen ska få färre än 5 guldmynt och ingen ska få fler än 20. På hur många sätt kan de dela upp mynten?

Lycka till!