TENTAMEN: Matematisk statistik och diskret matematik D (MVE055/MSG810)
Tid och plats: Måndagen den 19 oktober 2009, kl. 08.30–12.30, Hörsalsvägen.
Jour: Marcus Isaksson, tel 0708-527663. Besöker tentamenssalen ca kl 10.00, 11.30.
Tillåtna hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare och Beta.
Betygsgränser: 3: 12 poäng, 4: 18 poäng, 5: 24 poäng. Maximalt antal poäng är 30.

1. (3p) Anta att A och B är oberoende händelser med $\mathbf{P}(A) = 0.4$ och $\mathbf{P}(B) = 0.7$. Beräkna:

   a) $\mathbf{P}(B^C)$
   b) $\mathbf{P}(A \cup B)$
   c) $\mathbf{P}(B|A)$

2. (3p) I ett visst strategispel avgörs en strid mellan en *anfallare* och en *försvarare* genom att de upprepande kastar varsin (ideal) tärning. Varje gång förlorar den som får lägst siffra en markör. Blir det lika förlorar alltid anfallaren en markör. Den som först får slut på markörer förlorar striden. Anta att anfallaren och försvararen börjar med två markörer vardera. Vad är sannolikheten att anfallaren vinner striden?

3. (5p) Tidningen *Allt om ljus* har bestämt sig för att testa vilken av två olika typer av lågenergilampor, typ A respektive typ B, som är effektivast (mätt i lumens per Watt, lm/W). De tänker därför mäta effektiviteten hos 10 slumpmässigt utvalda lampor av vardera typen och beräkna stickprovsmedelvärdena $\overline{X}_A$ och $\overline{X}_B$ samt stickprovsstandardavvikelserna S_A och S_B. De antar att effektiviten hos lampor av vardera typen är normalfördelade med samma varians men antagligen olika väntevärden.

   a) Ange ett 95%-igt konfidensintervall för väntevärdet av effektiviteten hos lamptyp A (uttryckt i $\overline{X}_A$ och S_A).
   b) Vad krävs av $\overline{X}_A, \overline{X}_B, S_A$ och S_B för att man med 95% konfidens ska kunna dra slutsatsen att väntevärdet av effektiviteten hos lamptyp A är högre respektive lägre än hos lamptyp B.
   c) Dra lämplig slutsats (med 95% konfidens) om undersökningen visade sig ge $\overline{X}_A = 58.1\,\text{lm/W}$, $\overline{X}_B = 60.8\,\text{lm/W}$, $S_A = 2.7\,\text{lm/W}$ samt $S_B = 2.3\,\text{lm/W}$.

   Obs: I a) och b) ska värden på alla konstanter tas fram och uttrycken förenklas så mycket som möjligt.

4. (3p) Låt $Y \sim \text{Exp}(2)$, dvs exponentialfördelad med väntevärde $\frac{1}{2}$. Bestäm

   a) $\mathbf{Var}[3Y - 1]$
   b) $\mathbf{E}[Y^3]$

5. (3p) För att avgöra om ett visst parti kan tänkas komma in i riksdagen (dvs få minst 4% av rösterna) gör ett opinionsinstitut en undersökning där 10000 röstberättigade personer tillfrågas om vilket parti de skulle röstat på om det vore val idag. Om X är antalet personer som svarade att de skulle röstat på partiet i fråga så kan man skatta andelen p som skulle röstat på partiet med $\hat{p} = \frac{X}{10000}$ och dra slutsatsen att partiet skulle ha kommit in i riksdagen med 95% konfidens om och endast om

$$\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{10000}} \geq 0.04$$

   Löser man ekvationen så ser man att slutsatsen kan dras om och endast om $\hat{p} \geq 0.044021$. Vad är sannolikheten att institutet kommer kunna dra den slutsatsen om det faktiskt är så att $p = 0.047$, dvs 4.7% av samtliga röstberättigade skulle ha svarat att de skulle ha röstat på partiet i fråga?

6. (3p) En kontinuerlig stokastisk variabel X har fördelningsfunktionen

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2} & \text{om } 1 \le x < \infty \\ 0 & \text{om } x < 1 \end{cases}$$

Beräkna

a) täthetsfunktionen $f_X(x)$.
b) väntevärdet $\mathbf{E}[X]$.

7. (3p) Gustavs arbetsdator kraschar väldigt ofta. Efter att ha fört lite statistik över antalet krascher har han kommit fram till att kraschena med god noggrannhet följer en Poissonprocess med intensiteten 3 krascher per arbetsdag (Gustavs arbetsdagar består alltid av 8 timmar).

a) Vad är sannolikheten att hans dator kraschar 5 gånger eller fler under en given arbetsdag?
b) En morgon innan jobbet bestämmer sig Gustav för att nästa arbetsdag som datorn kraschar 5 gånger eller fler blir den sista med den datorn. Dagen efter kommer han kräva en ny. Vad är väntevärdet av antalet ytterligare arbetsdagar som Gustav kommer att använda sin nuvarande dator?

8. (4p) Låt $X_0, X_1, X_2, \ldots$ vara en Markovkedja med fyra tillstånd $1, 2, 3, 4$ och övergångsmatrisen $P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.

Anta att starttillståndet X_0 har fördelningen $X_0 = \begin{cases} 1 & \text{m.s.} & 2/9 \\ 2 & \text{m.s.} & 1/9 \\ 3 & \text{m.s.} & 2/9 \\ 4 & \text{m.s.} & 4/9 \end{cases}$.

a) Ange fördelningarna för X_1 och X_2.
b) Om $X_1 = 4$, vad är den betingade fördelningen för X_0 givet detta? Dvs, vad är $\mathbf{P}(X_0 = i | X_1 = 4)$ för $i = 1, 2, 3$ och 4?

9. (3p) Visa att om X är en godtycklig s.v. med väntevärde μ och standardavvikelse σ så är

$$\mathbf{P}(\mu - 6\sigma < X < \mu + 6\sigma) \ge 97\,\%$$

Lycka till!