Lösningar till tentamen i Matematisk statistik och diskret matematik D2 (MVE055/MSG810).
Den 13 januari 2010.

1. Lösning:

   a) $\mathbf{E}[X] = 0.8 \cdot 1 + 0.2 \cdot 0 = 0.8$ och $\mathbf{E}[X^2] = 0.8 \cdot 1^2 + 0.2 \cdot 0^2 = 0.8$ ger
   $\mathbf{Var}\, X = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 = 0.8 - 0.8^2 = 0.16$

   b) $\mathbf{E}[XY] = \mathbf{P}(X = 1, Y = 1) = 0.3$ och $\mathbf{E}[Y] = \mathbf{P}(Y = 1) = 0.4$ ger
   $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y] = 0.3 - 0.8 \cdot 0.4 = -0.02$

   c) $\mathbf{P}(Y = 1 \mid X = 0) = \frac{\mathbf{P}(Y=1,X=0)}{\mathbf{P}(X=0)} = \frac{\mathbf{P}(Y=1)-\mathbf{P}(Y=1,X=1)}{\mathbf{P}(X=0)} = \frac{0.4-0.3}{1-0.8} = \frac{1}{2}$

2. Lösning:

   a) Sannolikheten för detta blir $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

   b) Beteckna ett utfall med den sekvens av författare som erhålls när hon öppnar paketen. Då är:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = 2) &= \mathbf{P}(\{AA\}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} \\ \mathbf{P}(X = 3) &= \mathbf{P}(\{BBB, ABA, BAA\}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{18}{60} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

   Eftersom vi vet vad det sista paketet innehåller när vi öppnat 4 så kan X bara anta värdena $2, 3$ eller 4. Alltså är $\mathbf{P}(X = 4) = 1 - \mathbf{P}(X = 2) - \mathbf{P}(X = 3) = \frac{15}{20}$ och

$$\mathbf{E}[X] = 2\frac{2}{20} + 3\frac{3}{20} + 4\frac{15}{20} = \frac{73}{20} = 3.65$$

3. Lösning:

   a) Låt $X \sim \mathrm{Norm}(-2, 4)$ vara medeltemperaturen det givna året. Då är
   $\mathbf{P}(X < -10) = \mathbf{P}(\frac{X+2}{4} \leq \frac{-10+2}{4}) = \Phi(-2) \approx 2.275\% \approx 2.3\%$

   b) Låt Y vara antalet gånger detta inträffar under 2000-talet. Då är $Y \sim \mathrm{Bin}(100, 0.02275)$ och $\mathbf{P}(Y \geq 1) = 1 - \mathbf{P}(Y = 0) = 1 - (1 - 0.02275)^{100} \approx 0.8999 \approx 90\%$.

4. Lösning:

   a) $X \sim \mathrm{Exp}(3)$ ger $\mathbf{E}[X] = \frac{1}{3}$ och $\sigma_X = \frac{1}{3}$.

   b) $X \sim \mathrm{Geom}(0.5)$ ger $\mathbf{E}[X] = 2$ och $\sigma_X = \sqrt{\frac{1-0.5}{0.5^2}} = \sqrt{2}$.

   c) $X \sim \mathrm{Bin}(13, \frac{1}{3})$ ger $\mathbf{E}[X] = 13 * \frac{1}{3} = \frac{13}{3} \approx 4.33$ och $\sigma_X = \sqrt{13\frac{1}{3}\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{26}}{3} \approx 1.70$.

5. Lösning:

   a) $p = \frac{X}{30} \pm 1.645\sqrt{\frac{X(30-X)}{30^3}}$
   $X = 25$ ger $p = 0.833 \pm 0.112$.

   b) Testning ger konfidensintervallen
   $p = 0.667 \pm 0.142$ om $X = 20$, och
   $p = 0.633 \pm 0.145$ om $X = 19$.
   Det krävs alltså $X = 20$ korrekta svar för att vi ska kunna dra den slutsatsen (med hjälp av ett dubbelsidigt konfidensintervall).

6. Lösning:

$$m_Z(t) = \mathbf{E}[e^{tZ}] = \int_1^3 \frac{1}{2} e^{tz} dz = \left[\frac{e^{tz}}{2t}\right]_1^3 = \frac{e^{3t} - e^t}{2t}, t \neq 0$$

och $m_Z(0) = \mathbf{E}[e^{0 \cdot Z}] = 1$ ger

$$m_Z(t) = \begin{cases} \frac{e^{3t} - e^t}{2t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

7. Lösning:
$\bar{X} = 1.9773$, $S \approx 0.03836$, $t_{0.005}(7) \approx 3.500$ och $n = 8$ ger konfidensintervallet

$$\bar{X} \pm t_{0.005}(7) \frac{S}{\sqrt{n}} \approx 1.9773 \pm 0.0475$$

8. Lösning:
Oberoende ger

$$\mathbf{E}[\widehat{p}] = \mathbf{E}[cX_A X_B] = c\mathbf{E}[X_A]\mathbf{E}[X_B] = c(1000a)(1000b) = 10^6 cp$$

Det räcker alltså att välja $c = 10^{-6}$.

9. Lösning:
Låt oss införa 8 tillstånd $\emptyset$, A, B, C, AB, AC, BC, ABC som beskriver vilka kategorier som spelaren har klarat och låt
$m_S = \mathbf{E}$[antal ytterligare frågor som behöver ställas om vi befinner hos i tillstånd S].
Processen kan beskrivas med en markovkedja med dessa tillstånd och det eftersökta $m_\emptyset$ kan beräknas rekursivt:

$$\begin{aligned}
m_{ABC} &= 0 \\
m_{AB} &= 1 + 0.7m_{AB} + 0.3m_{ABC} = 1 + 0.7m_{AB} \Rightarrow m_{AB} = \frac{10}{3} \\
m_{AC} &= 1 + 0.9m_{AC} + 0.1m_{ABC} = 1 + 0.9m_{AC} \Rightarrow m_{AC} = 10 \\
m_{BC} &= 1 + 0.8m_{BC} + 0.2m_{ABC} = 1 + 0.8m_{BC} \Rightarrow m_{BC} = 5 \\
m_A &= 1 + 0.6m_A + 0.1m_{AB} + 0.3m_{AC} = 0.6m_A + \frac{13}{3} \Rightarrow m_A = \frac{65}{6} \\
m_B &= 1 + 0.5m_B + 0.2m_{AB} + 0.3m_{BC} = 0.5m_B + \frac{19}{6} \Rightarrow m_B = \frac{19}{3} \\
m_C &= 1 + 0.7m_C + 0.2m_{AC} + 0.1m_{BC} = 0.7m_C + \frac{7}{2} \Rightarrow m_C = \frac{35}{3} \\
m_\emptyset &= 1 + 0.4m_\emptyset + 0.2m_A + 0.1m_B + 0.3m_C = 0.4m_\emptyset + \frac{219}{30} \Rightarrow m_\emptyset = \frac{219}{18} \approx 12.17
\end{aligned}$$