

TENTAMEN: Matematisk statistik och diskret matematik (MVE055, MSN620),
tisdagen den 18 oktober 2005, kl. 8.30–12.30, V-huset.

Jour: Alexandra Jauhiainen, tel 772 5380. Besöker tentamenssalen ca kl 10.00, 11.30.

Tillåtna hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare och Beta (eller kopior ur Beta).

Betygsgränser: 3a: 12 poäng, 4:a: 18 poäng, 5:a: 24 poäng.

Varje uppgift kan ge 3 poäng och maximalt antal poäng är 30.

1. Antag att 25 % av alla bilar släpper ut mer miljöfarliga ämnen än tillåtet. En bil som verkligen släpper ut för mycket skadliga ämnen har sannolikheten 0.99 att klassas som miljöfarlig vid ett test på bilprovningen, medan en bil som inte släpper ut för mycket felaktigt klassas som miljöfarlig vid testet med sannolikhet 0.17. Om man vid bilprovningen klassat en bil som miljöfarlig, vad är då sannolikheten att den verkligen släpper ut för mycket miljöfarliga ämnen?
2. a) Antag att vid varje uppkörningsförsök Kalle gör är sannolikheten 0.8 att han klarar sig. Vad är sannolikheten att det krävs exakt 3 försök för Kalle att få ett körkort om man kan anta oberoende mellan försöken? Vad är förväntat antal försök han behöver göra?
b) Olle är lite listigare än Kalle och övar mellan försöken. Sannolikheten att han klarar sig på försök i är $0.8 + 0.02(i - 1)$. Har han inte fått sitt körkort efter 5 försök ger han upp. Vad är sannolikheten att Olle inte får något körkort?
3. Ta fram de genererande funktionerna för följande talföljder:
a) 1, 2, 4, 8, ...
b) -3, 9, -27, 81, ...
c) Låt $A(x)$ beteckna den genererande funktionen i a) och låt $B(x)$ beteckna den genererande funktionen i b). För vilken talföljd är $A(x) + B(x)$ genererande funktion?
4. En markovkedja har följande övergångsmatris:

	1	2	3	4
1	1/4	3/4	0	0
2	1/3	1/3	1/3	0
3	0	0	0	1
4	0	0	0	1

- a) Vad är den förväntade tiden till absorption om man startar i tillstånd 1?
b) Definiera markovegenskapen, och formulera i ord vad den betyder.
5. a) Definiera typ I fel och typ II fel.
b) Vilken typ av fel garderar man sig främst mot vid statistiska test, och vad innebär det för vilka slutsatser som kan dras vid förkastande respektive ej förkastande av nollhypotesen?

6. En lampfabrikant hävdar att minst 90 % av alla tillverkade lampor håller en viss livslängd. Eftersom du tycker att dina lampor av detta fabrikt alltid går sönder väl snabbt är du skeptisk till detta, och för att undersöka om det verkligen stämmer tog du ett stickprov av storlek 100. Det visade sig att 13 stycken inte höll den utlovade livslängden. Formulera lämplig noll- och mothypotes och utför ett statistiskt test för att undersöka om tillverkarens påstående verkligen stämmer. Välj signifikansnivå / förkastelsegräns själv.
7. Man har gjort en undersökning av nikotinhalten i två olika cigarettfabrikat. Medelvärdet av nikotinhalten i tio cigaretter av fabrikt A var 3.1 milligram och stickprovsstandardavvikelsen 0.5 milligram. Medelvärdet av nikotinhalten i åtta cigaretter av fabrikt B var 2.7 milligram och stickprovsstandardavvikelsen 0.7 milligram. Antag att stickproven är oberoende, normalfördelade och med samma varians. Bestäm ett 95%igt konfidensintervall för skillnaden i förväntad nikotinhalt mellan de två fabrikten.
8. Antag att X är en stokastisk variabel med väntevärde 5 och varians 2. Låt $Y = 3X + 1$. Beräkna väntevärde och varians för Y , samt kovarians och korrelation mellan X och Y .
9. Antag att du singlar ett rättvist mynt 100 gånger.
 - a) Vad är väntevärdet av antal gånger som du får krona 5 gånger i rad?
 - b) Vad är väntevärdet av antal gånger som du får krona 5 gånger i rad eller klave 5 gånger i rad? ¹
10. Antag att X och Y är oberoende och exponentialfördelade stokastiska variabler med väntevärde μ_X respektive μ_Y . Visa att fördelningen för $\min\{X, Y\}$ är exponentialfördelad med väntevärde $(1/\mu_X + 1/\mu_Y)^{-1}$. Ledtråd: Tänk på hur ni beräknade fördelningsfunktionen för max av geometriska stokastiska variabler på skiplistarbetet.

Lycka till!

¹Anekdot för den som har tid och lust: Det sägs att en ungersk statistiklärare testade sina studenters ärlighet genom att ge dem följande hemuppgift: "Singla en slant 100 gånger och skriv ner den sekvens du får." Han kunde sedan lätt sortera ut fuskarna: de som inte hade några sekvenser av krona eller några sekvenser av klave som var längre än 5. Vad han utnyttjade var att människans förmåga att efterlikna slumpen är dålig - det finns nästan ingen som skriver så många lika i följd.