**TENTAMEN:** Matematisk statistik och diskret matematik D (MVE055/MSG810)
**Tid och plats:** Onsdagen den 14 januari 2009, kl. 14.00–18.00, VV-salar.
**Jour:** Marcus Isaksson, tel 0708-527663. Besöker tentamenssalen ca kl 15.30, 17.00.
**Tillåtna hjälpmedel:** Chalmersgodkänd räknare och Beta.
**Betygsgränser:** 3: 12 poäng, 4: 18 poäng, 5: 24 poäng. Maximalt antal poäng är 30.

1. (3p) Inför en tredagars konferens packar Torkel ned 6 sockar i sin ryggsäck. Av dessa är 4 blåa och de övriga 2 röda. Varje dag under resan plockar han sedan upp två oanvända sockar på måfå och tar på sig dem (han ser ändå ingen skillnad på dem eftersom han inte vågar tända någon lampa av rädsla att väcka övriga gäster på vandrarhemmet). Låt $X$ vara antalet dagar (av totalt tre) som Torkel bär likafärgade sockar. Beräkna

   a) $\mathbf{P}(X = 3)$
   b) $\mathbf{E}[X]$

2. (3p) Du singlar ett idealt mynt om och om igen tills dess att värdena på följande stokastiska variabler har bestämts:
   $X$: Antal klavar bland de 10 första singlingarna.
   $Y$: Antal singlingar tills första klaven fås.

   a) Ange namn och värden på parametrar för de fördelningar som beskriver $X$ och $Y$.
   b) Beräkna $\mathbf{P}(X \geq 7)$.
   c) Beräkna $\mathbf{P}(X \geq 7 | Y \geq 4)$.

3. (3p) De *heltalsvärda* stokastiska variablerna $X$ och $Y$ har den tvådimensionalla frekvensfunktionen

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{21}, & x \geq 0, y \geq 0 \text{ och } x + y \leq 5 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

   a) Bestäm marginalfördelningen $f_X(x)$ för $X$.
   b) Faktum är att korrelationskoefficienten $\rho_{X,Y}$ för $X$ och $Y$ antar ett av följande värden: -1.25, -1.00, -0.50, 0.00, 0.25, 1.00. Vilket?

4. (5p) Ett visst astronomiskt fenomen som enkelt kan observeras med blotta ögot kan antas inträffa enligt en Poissonprocess med intensiteten 2 händelser per dygn.

   a) Anta att Ada bestämmer sig för att bevaka stjärnhimlen en kväll mellan kl 20.00 och 24.00. Vad är sannolikheten att hon observerar fenomenet?
   b) Hur länge måste Ada bevaka stjärnhimlen om hon vill ha 50% chans att observera fenomenet?
   c) Anta att Ada lyckas övertala sin kompis Bea att hjälpa till så att Ada bevakar stjärnhimlen mellan kl 20.00 och kl 24.00, medan Bea bevakar mellan kl 22.00 och kl 02.00 (de får alltså två timmar tillsammans och två timmar ensamma vardera). Vad är sannolikheten att båda två observerar fenomenet?

   *Du kan anta att fenomenet är så tydligt att det inte kan missas av någon som bevakar stjärnhimlen så väl som Ada och Bea gör.*

5. (4p) En flingtillverkare hävdar att innehållets vikt i en viss sorts flingpaket är normalfördelat med väntevärde i intervallet 740-760 gram och standardavvikelse i intervallet 15-20 gram. För att undersöka om dessa uppgifter stämmer tänker Kalle väga innehållet i ett stickprov bestående av 50 slumpmässigt utvalda paket och därefter beräkna stickprovsmedelvärdet $\bar{X}$ och stickprovsstandardavvikelsen $S$.

   a) Ange ett 95%-igt konfidensintervall för standardavvikelsen.
   b) För vilka värden på $S$ kan Kalle dra slutsatsen (med 95% konfidens) att tillverkarens uppgifter om standardavvikelsen inte stämmer.

6. (3p)

   a) Ange den genererande funktionen för serien $\frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \ldots$.
   b) Beräkna $\mathbf{E}[Y^3]$ om $Y$ är $\chi^2$-fördelad med två frihetsgrader. Du kan till exempel utnyttja att för $t < 0.5$ så är

$$\mathbf{E}\left[e^{tY}\right] = \frac{1}{1-2t}$$

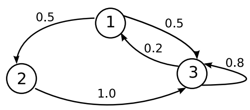
7. (3p) Låt $X_1, \ldots, X_{50}$ vara 50 oberoende observationer från en fördelning med täthetsfunktionen

$$f(x) = \frac{1}{\theta}, 0 \leq x \leq \theta$$

   där $\theta > 0$ är en okänd parameter.

   a) Visa att $2X_1$ är en väntevärdesriktig skattare för $\theta$.
   b) Föreslå en bättre skattare och motivera varför den är bättre.

8. (3p) Låt $X_0, X_1, X_2, \ldots$ beteckna tillstånden i en slumpvandring på grafen nedan och




   anta att vi alltid börjar i tillstånd 1, dvs $X_0 = 1$ med sannolikhet 1. Vad är $\mathbf{P}(X_1 = 2 | X_2 = 3)$?

9. (3p) I en opinionsundersökning i september trodde 78 av 200 tillfrågade på stigande bostadspriser under det kommande året. I en ny undersökning i november trodde endast 69 av 200 på stigande bostadspriser. Anta att stickproven bestod av helt slumpmässigt utvalda i Sverige bosatta personer mellan 18 och 65 år och beräkna ett 95%-igt konfidensintervall för minskningen (i procentenheter) av andelen personer i populationen som trodde på stigande bostadspriser.

Lycka till!