**EXAM:** Matematisk statistik och diskret matematik D (MVE055/MSG810)
**Tid och plats:** Onsdag den 12 januari 2011, kl. 14.00–18.00, V.
**Jour:** Krzysztof Bartoszek, tel. 0700-771 093.
**Hjälpmedel:** Chalmersgodkänd miniräknare och som mest en (dubbelsidig) A4 sida med egna anteckningar. Tabeller med lämpliga statistiska fördelningar är givna.
**Betyg:** 3: 12 poäng, 4: 18 poäng, 5: 24 poäng. Maximala antalet poäng: 30.
**Motivationer:** Alla svar ska vara motiverade.
**Språk:** Det finns en engelsk och en svensk version av frågorna. Du kan skriva dina svar på bägge av dessa två språk.

1. (5p)

   Låt $A$ och $B$ vara två disjunkta händelser med $P(A) = 0.3$ och $P(B) = 0.4$.

   a) Är $A$ och $B$ oberoende och varför (varför inte)?

   b) Beräkna $P(A \cup B)$ och $P(A \cap B^C)$.

   c) (2p) Ge och bevisa Bayes' sats.

   d) Låt $C \subset A$ sådant att $P(C) = 0.1$. Vad är $P(C|A)$ och $P(C|B)$?

2. (5p)

   a) Skriv ner Centrala Gränsvärdessatsen

   b) Diskutera vad Centrala Gränsvärdessatsen kan användas för.

   c) Du är systemadministratör på ett universitet och tog ett stickrov på diskutrymme från 1000 anställda. Informationen summerades genom:
   $\sum_i x_i = 10221.31$, $\sum_i x_i^2 = 125820.8$.
   Ett av dina plikter är förstås att se till att var och en av de anställda har tillräckligt höga kvoter för att kunna göra sitt arbete. Skatta den genomsnittliga diskanvändningen och beräkna ett konfidensintervall på en nivå som du bedömer är rimlig. Varför är det tillåtet att använda formeln och varför borde du ställa denna fråga till dig själv? När en ny anställd kommer, hur stor kvot skulle du ge honom från början och varför?

3. (3p)

   Antag att $Y = \beta_0 + \beta_1 X$ där $X$ är en stokastisk variabel med väntevärde $\mu_X$ och variansen $\sigma_X^2$.

   a) Hitta väntevärdet av $Y$.

   b) Hitta variansen av $Y$.

   c) Hitta kovariansen mellan $X$ och $Y$.

4. (4p)

   För att de ska vara effektiva måste reflekterande motorvägsskyltar fångas upp av bilens strålkastare. För att göra detta från ett långt avstånd måste strålkastarna vara i läget ”högt”. En undersökning gjort av motorvägsingenjörer avslöjade att 45 av 50 slumpmässigt valda bilar i en högtrafikerat område har strålkastare i läget ”lågt”.

   a) Hitta en punktskattning för $p$, proportionen av bilar i detta typ av område som användet låga strålkastare.

   b) Hitta en 90% konfidensintervall för $p$.

   c) (2p) Hur stor skulle stickprovsstorleken behövt vara för att uppskatta $p$ upp till 0.02 med konfidensgraden 90% om ingenjörer inte hade genomfört deras undersökning?

Formeln för en konfidensintervall på nivå $1-\alpha$ för $p$ är $\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$ och formeln för stickprovsstorleken OM vi har tidigare kunskap om $p$ är $n = \frac{z^2_{\alpha/2}\hat{p}(1-\hat{p})}{d^2}$.

5. (4p)

   Den bivariata frekvensfunktionen för ett par av diskreta stokastiska variabler $(X, Y)$ är $f_{XY}(x, y) = 2/(n(n+1))$ där $1 \le y \le x \le n$ and $n > 0$ är ett positiv heltal.

   a) Verifiera att $f_{XY}(x, y)$ uppfyller villkoren som är nödvändiga för att $f_{XY}(x, y)$ ska vara en frekvensfunktion.

   b) Hitta de marginella fördelningarna för $X$ och $Y$.

   c) Är $X$ och $Y$ oberoende?

   d) Vad säger oss vetskapen om oberoendet mellan $X$ och $Y$ om kovariansen mellan dessa?

6. (2p)

   a) Ge definitionen för den genererande funktionen för talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Ange den genererande funktionen för talföljden $a_n = 2^n + 3^{n-1}$.

   b) Partialbråksuppdela $\frac{x^2}{(x-1)(x+3)(x-5)}$.

7. (4p)

   a) Skriv ner Stora Talens Lag och diskutera varför det är ett viktigt resultat.

   b) Vi har två mynt: det ena är rättvist och det andra är sådant att det ger krona med sannolikhet 0.75. Ett av dessa två väljs slumpmässigt och detta mynt kastas $n$ gånger. Låt $S_n$ vara antalet kronor som man får bland dessa $n$ kast. Tillåter Stora Talens Lag oss att förutsäga proportionen av kronor som dyker upp i längden? Kan vi säga vilket mynt valdes efter att vi har sett ett stort antal kast?

8. (3p) Ge och bevisa Markov's olikhet.

Lycka till! Good luck!